§1.2 数列的极限

一、数列极限的概念

二、收敛数列的性质

一、数列极限的概念

极限概念是从常量到变量,从有限到无限,即从初等数学过渡到高等数学的关键.

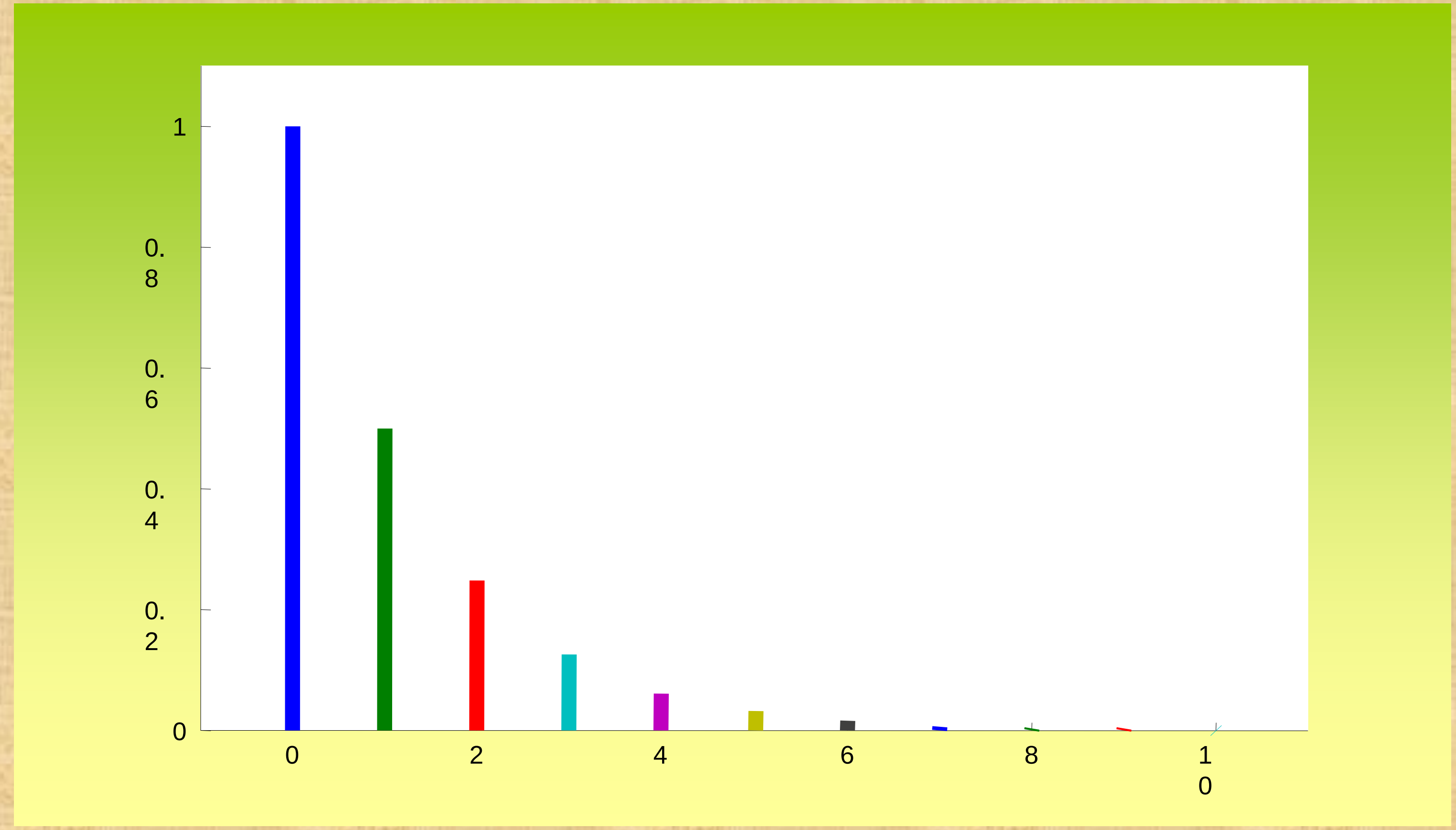
极限的思想源远流长.

庄子(约公元前355~275年)在《天下篇》

"一尺之棰,日取其半,万世不竭".

如图所示:

将每天截后的木棒排成一列，长度组成的数列为：$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$



随着n无限的增加，木棒的长度构成的数列无限的趋近于零。

欧洲古希腊时期 “穷竭法”

柏拉图的学生攸多克萨斯（公元前408-355年）

命题： “取去一半之量，再取去所余之一半，这样继续下去，可以使所余的量小于另一个任意给定的量”

这正是近代极限论的雏形。

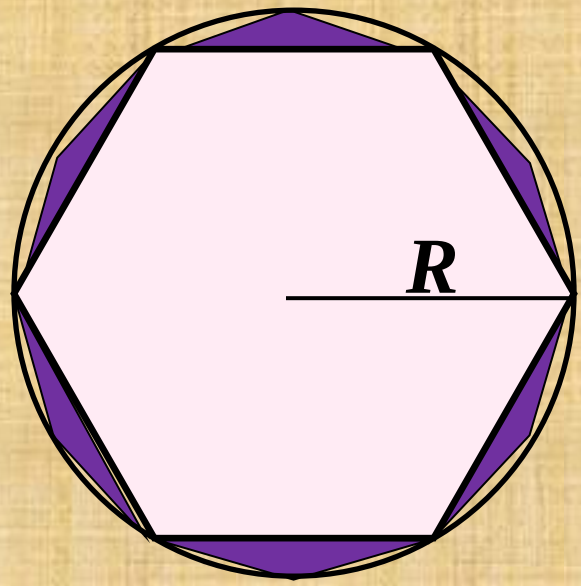
刘徽---“割圆术”

正 6 边形的面积 A_1

正 12 边形的面积 A_2

$\Lambda\ \Lambda \qquad \Lambda\ \Lambda$

正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积 A_n



$$A_1, A_2, A_3, \Lambda\ , A_n, \Lambda \xrightarrow{n\to\infty} S$$

1、数列的概念

如果按照某一法则, 对每个$n\in N^+$, 对应着一个确定的实数x_n, 则得到一个序列

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_n, \quad \cdots,$$

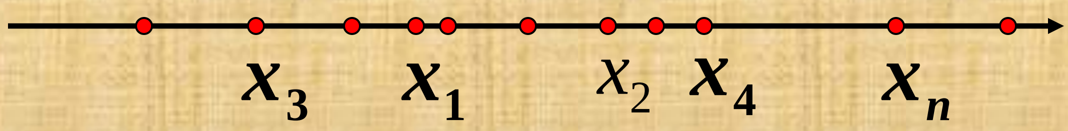
这一序列叫做数列, 记为$\{x_n\}$, 其中第n项x_n叫做数列的一般项.

例如 $2,4,8,\Lambda ,2^n,\Lambda ;$ $\{2^n\}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\Lambda ,\frac{1}{2^n},\Lambda ;$ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

注意：

（1）数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \Lambda, x_n, \Lambda$.



（2）数列 $\{x_n\}$ 可以看作自变量为正整数n的函数：

$$x_n = f(n), n \in N^+$$

问题: 当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值? 如果是, 如何确定?

例 观察以下数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势.

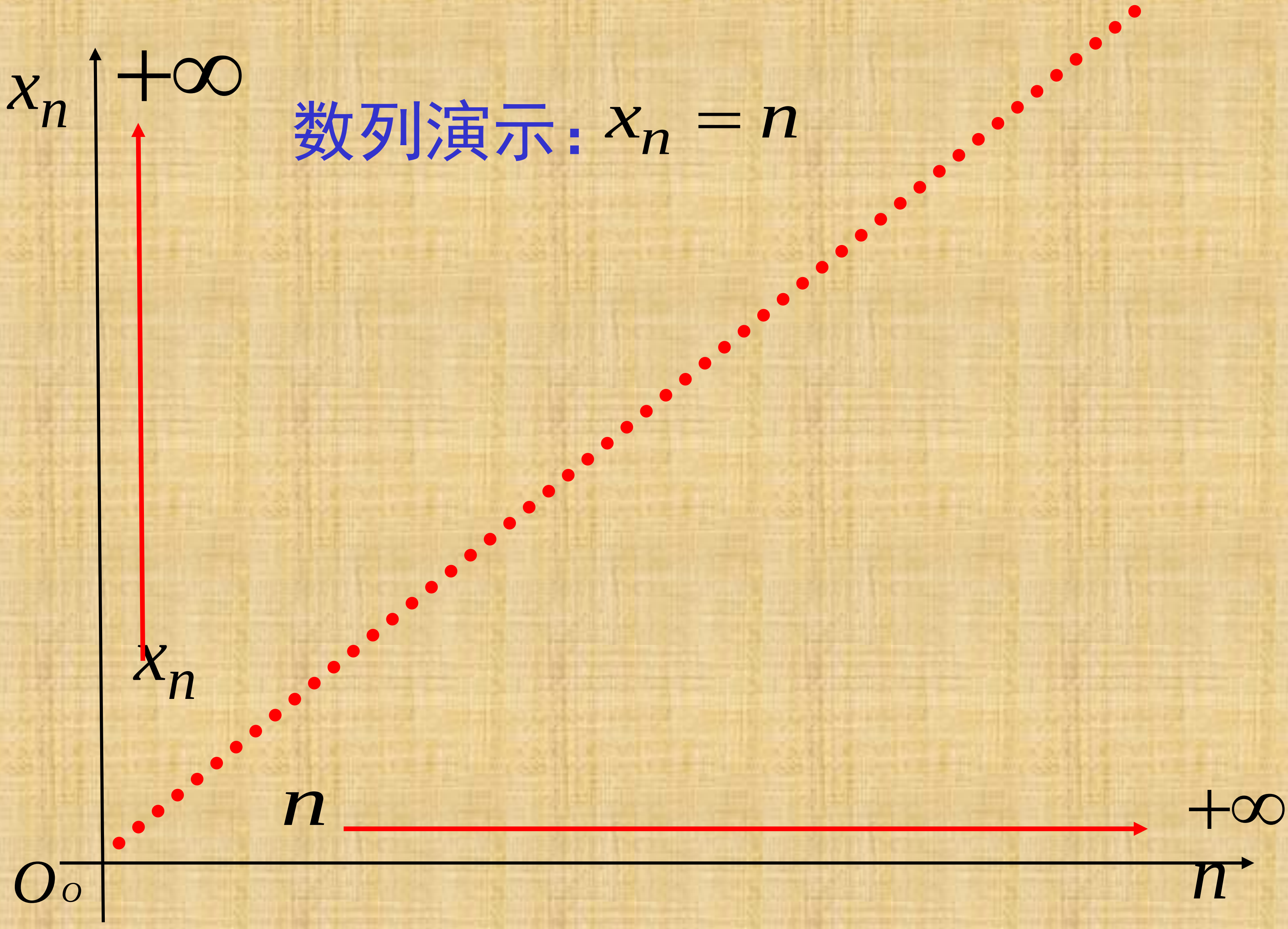
$(1)\ x_n=(-1)^n$ $(2)\ x_n=n$

$(3)\ x_n=1-\dfrac{1}{n}$ $(4)\ x_n=1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

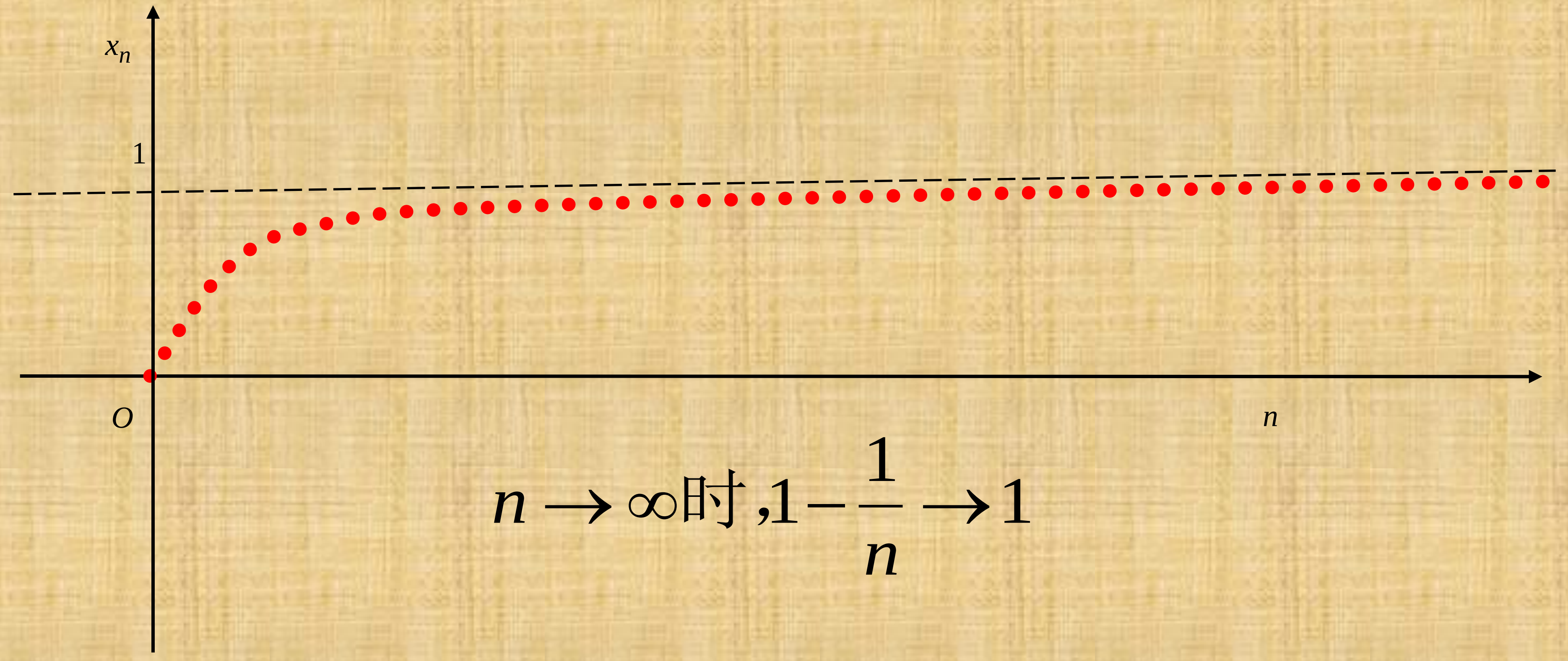
数列演示：$x_n = (-1)^n$

目标不惟一！！！！！！！！！！！！

数列演示：$x_n = n$

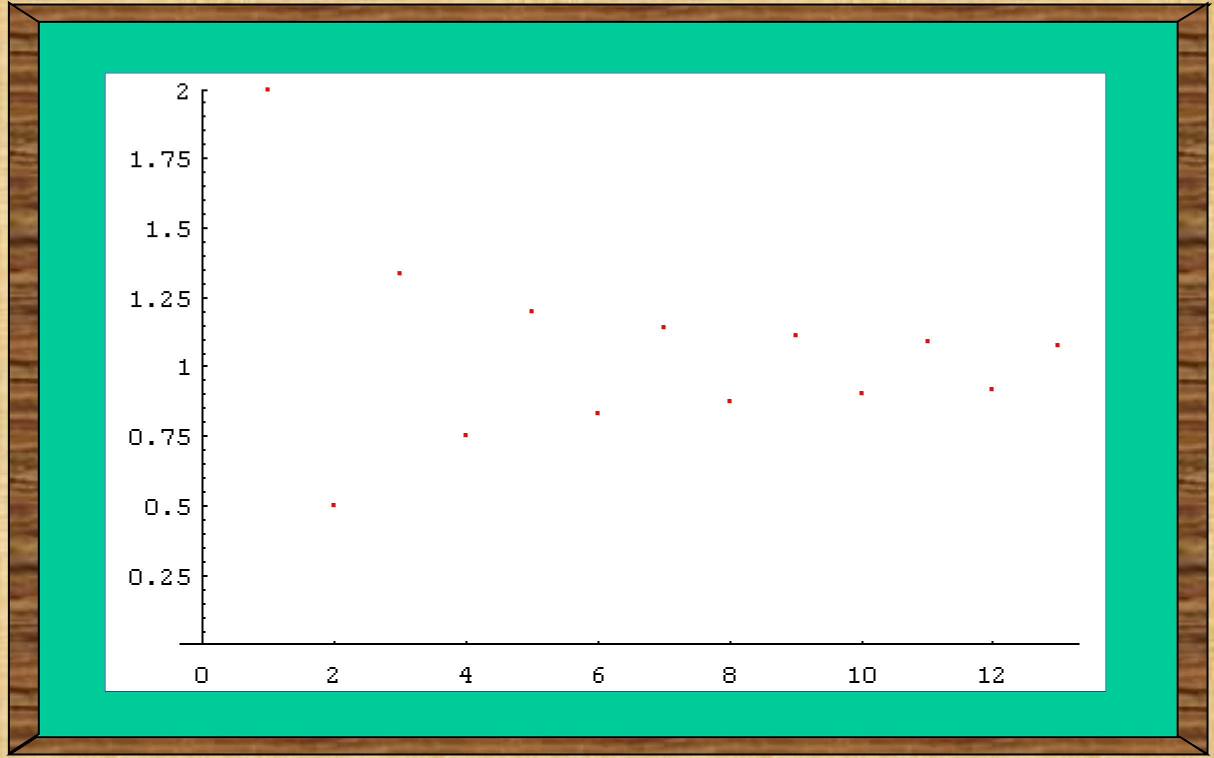


数列演示：$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

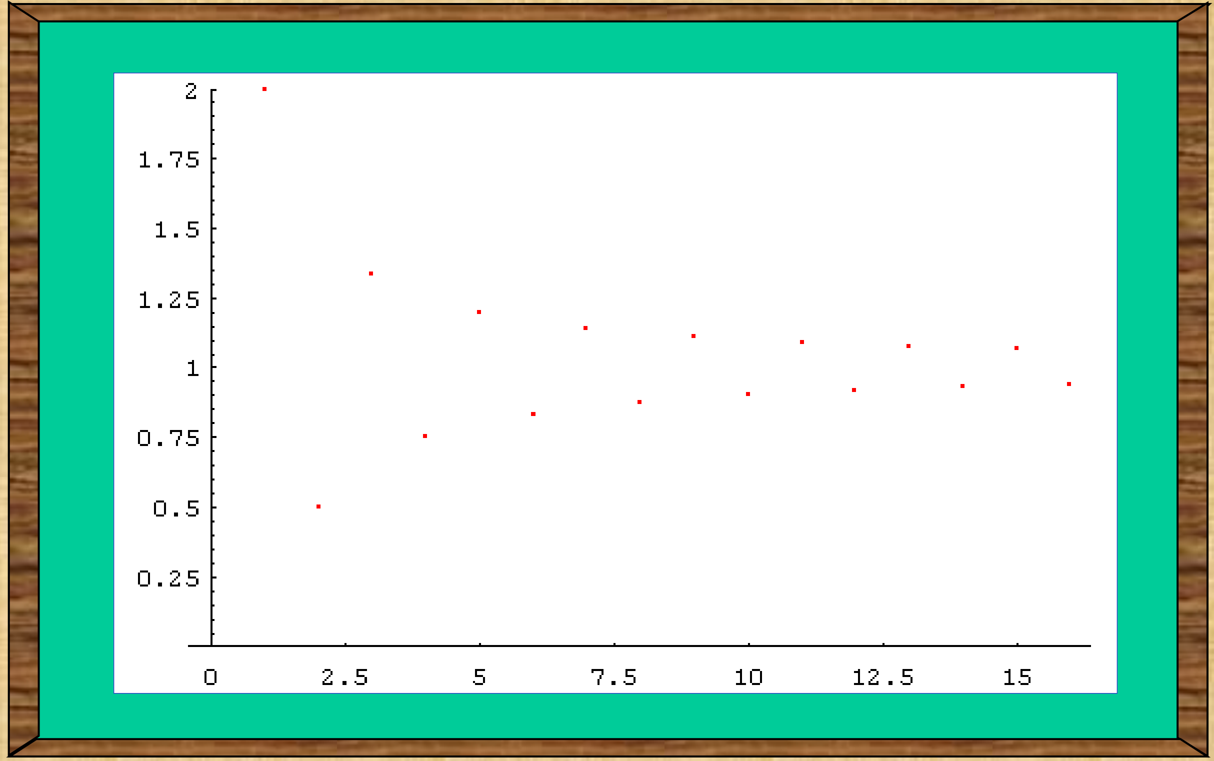


$$n \to \infty 时, 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

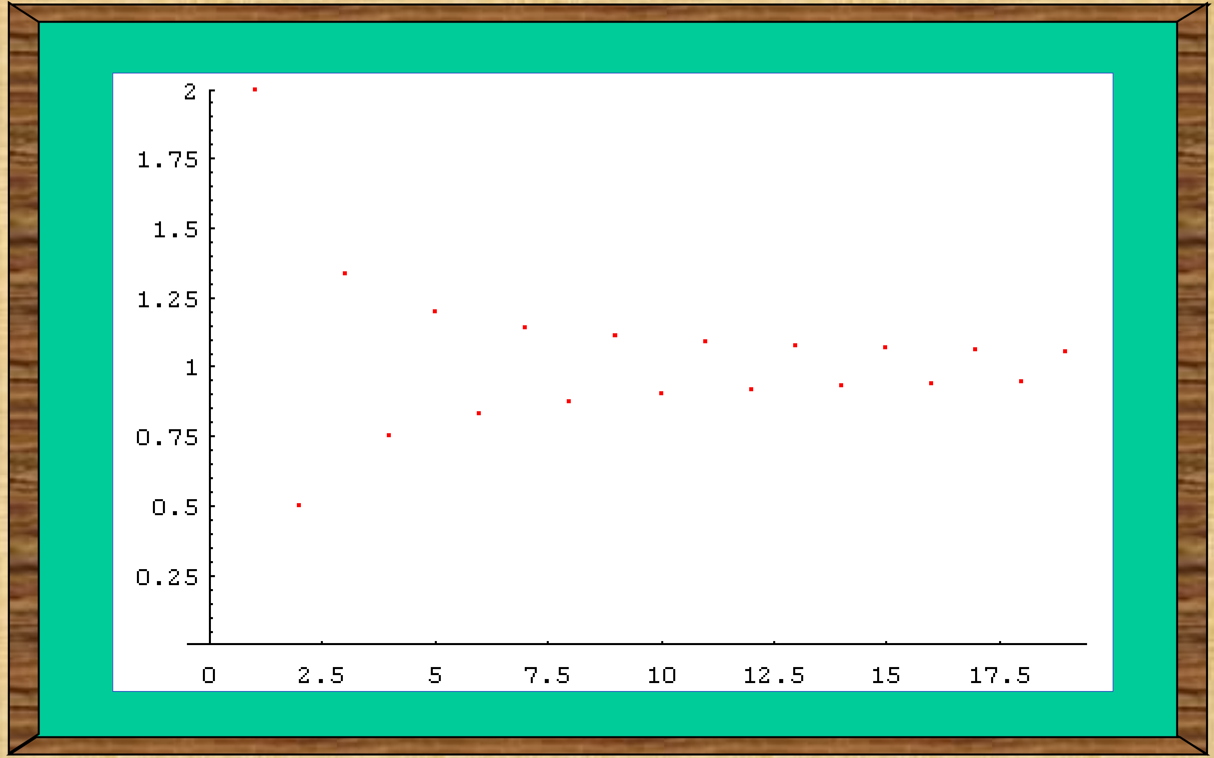
数列演示: $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



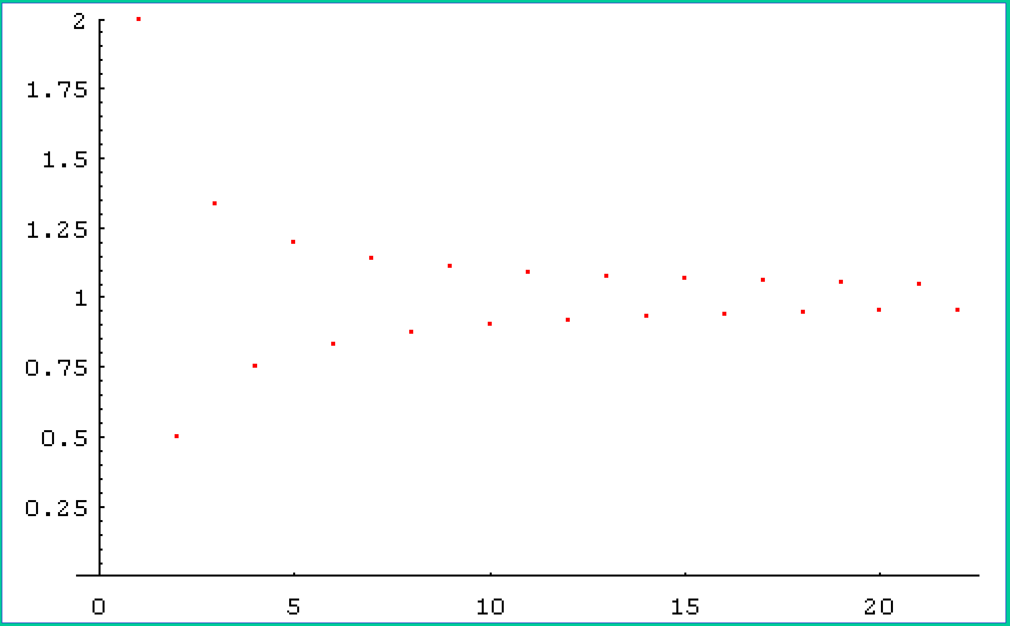
数列演示：$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$



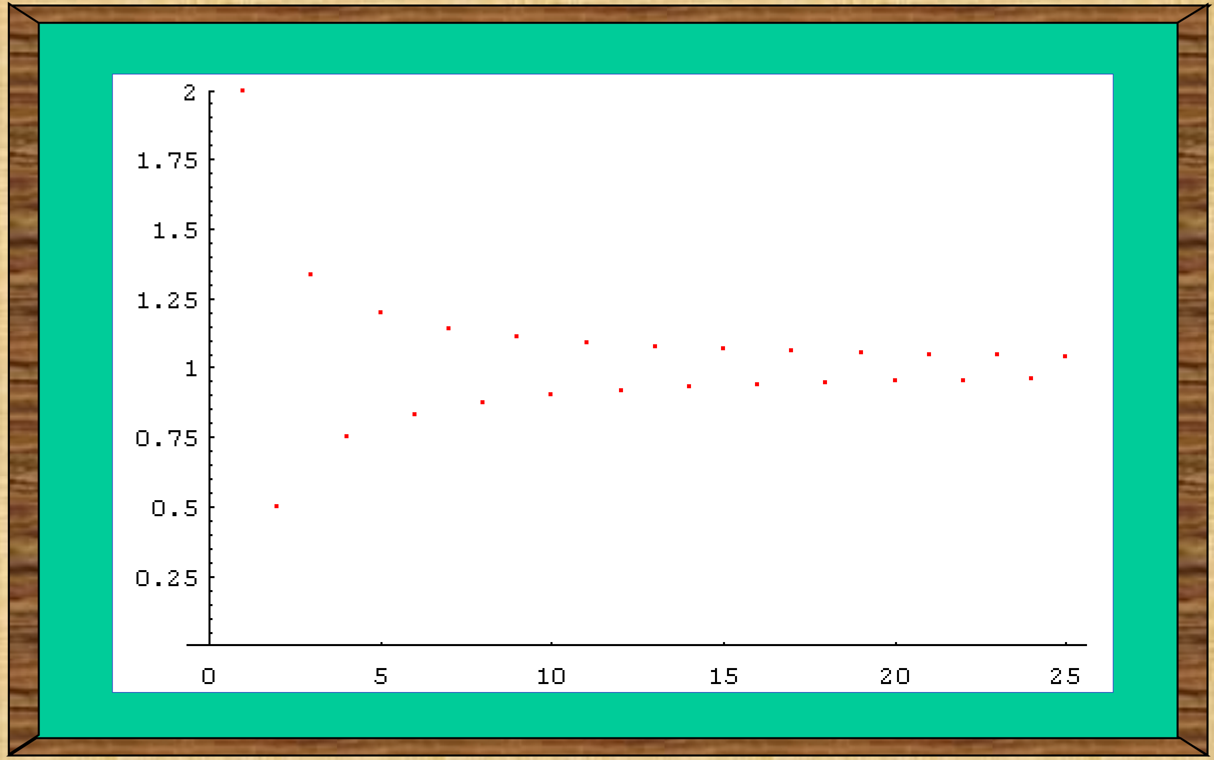
数列演示: $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$



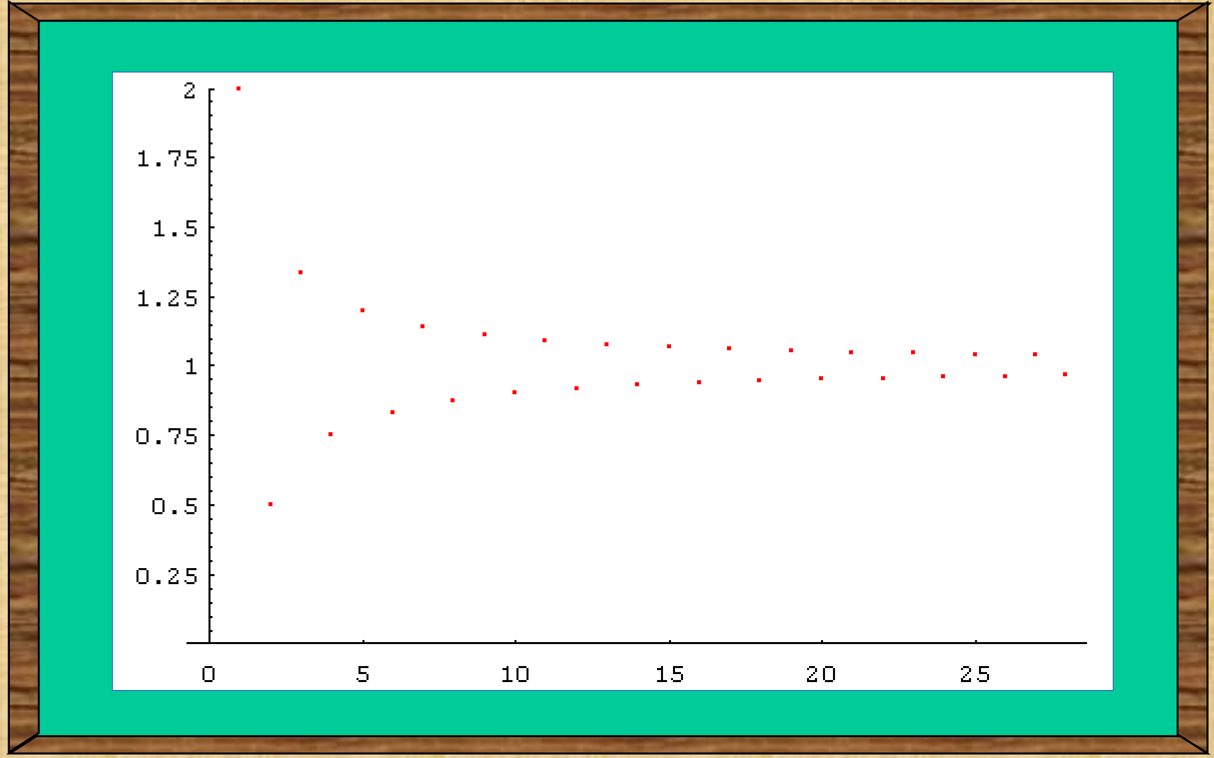
数列演示: $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



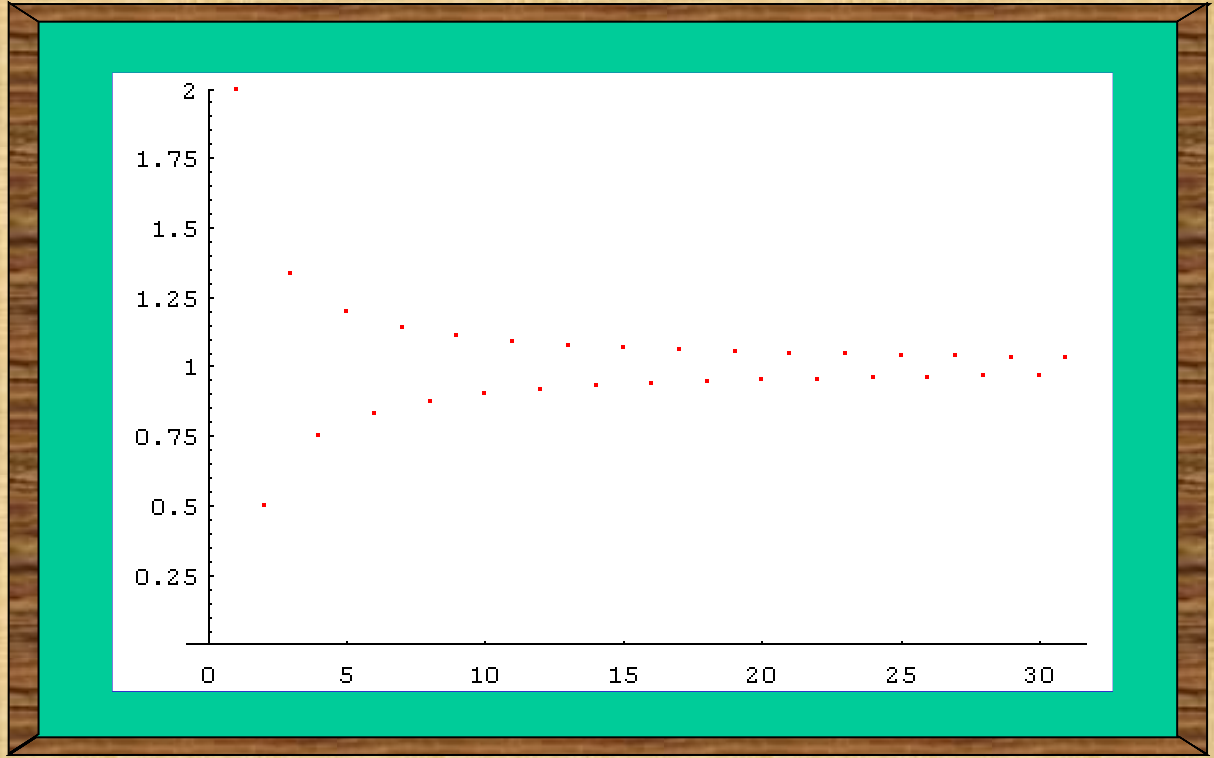
数列演示：$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



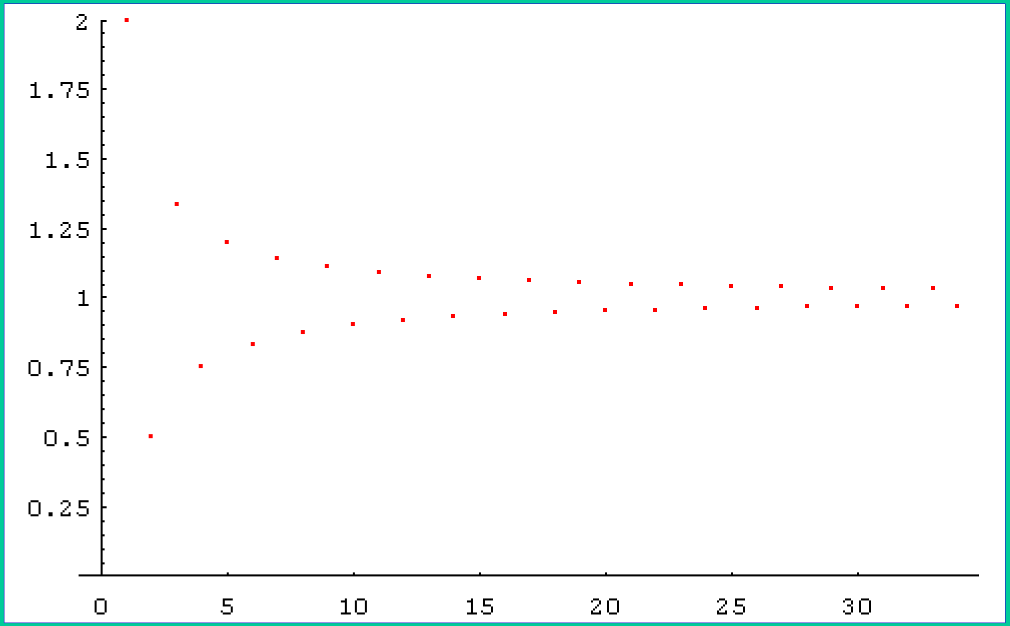
数列演示：$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



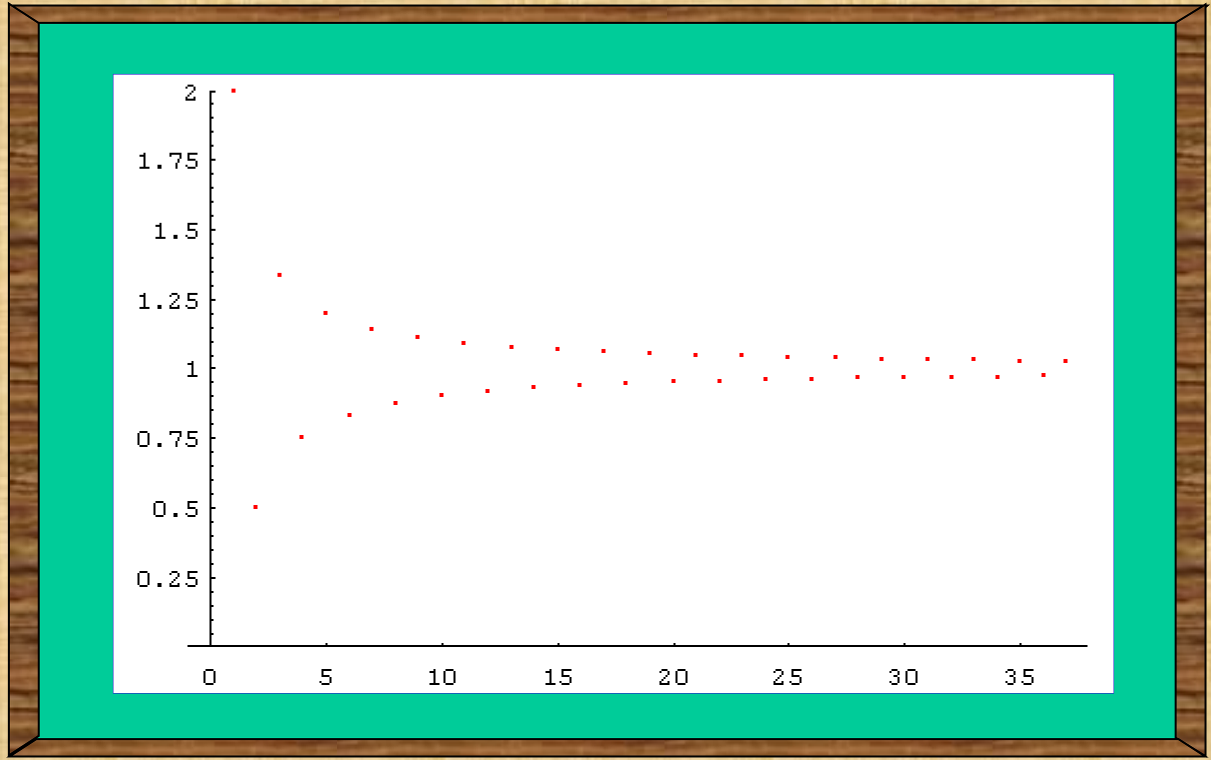
数列演示: $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



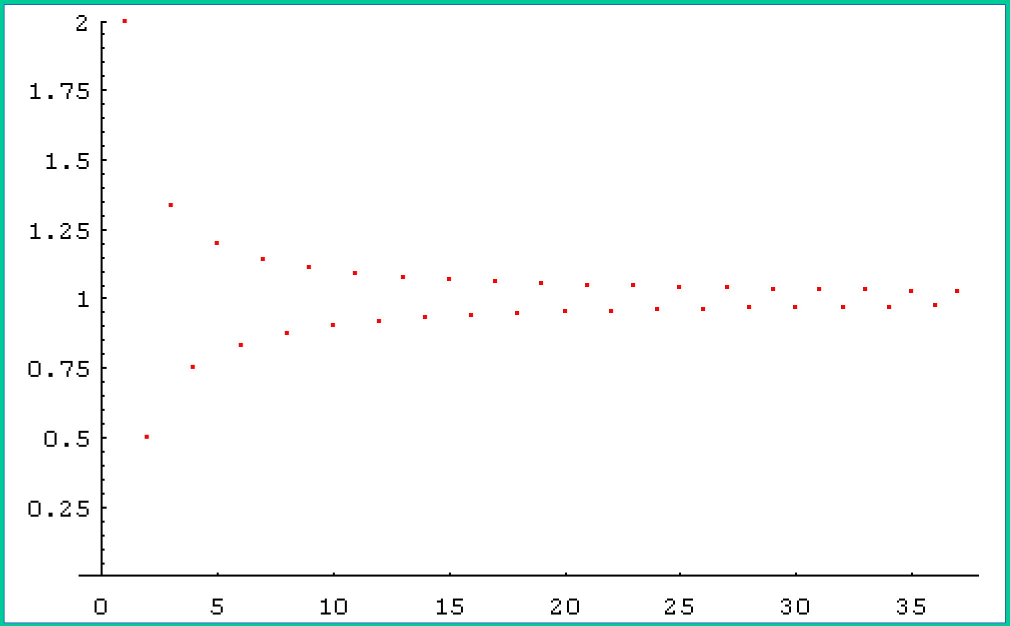
数列演示: $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



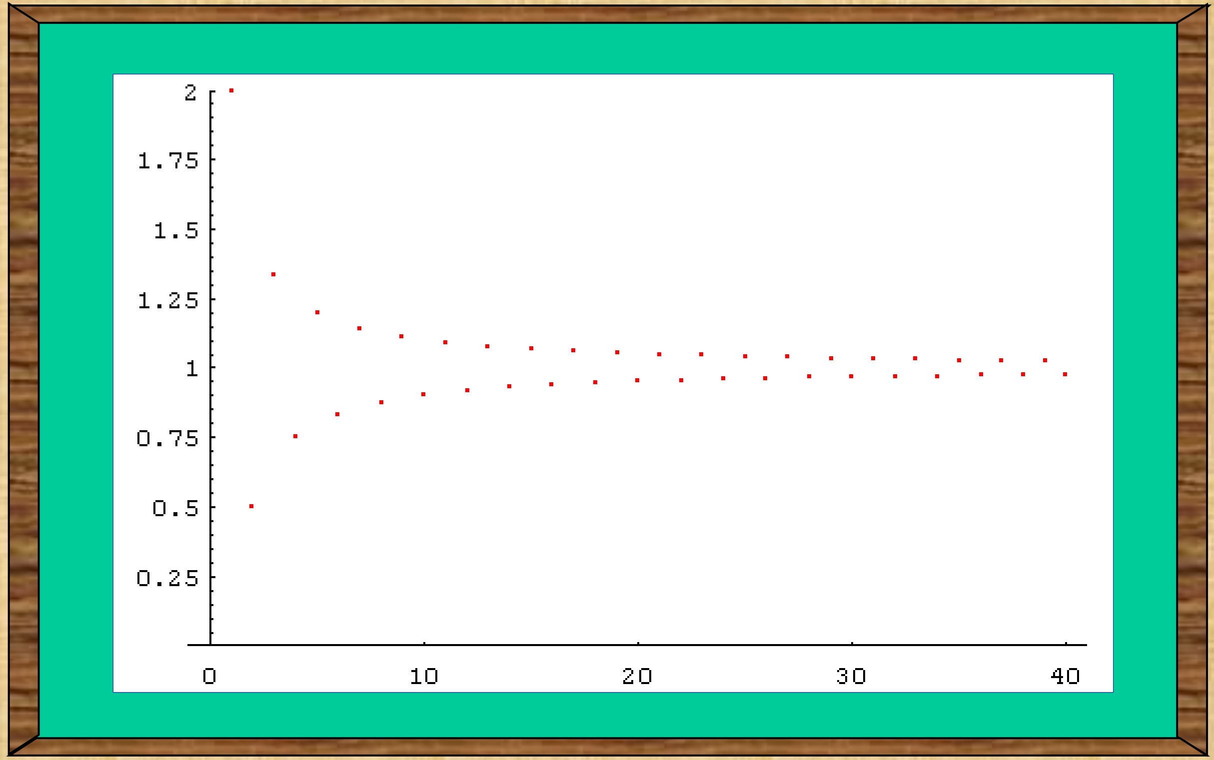
数列演示: $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



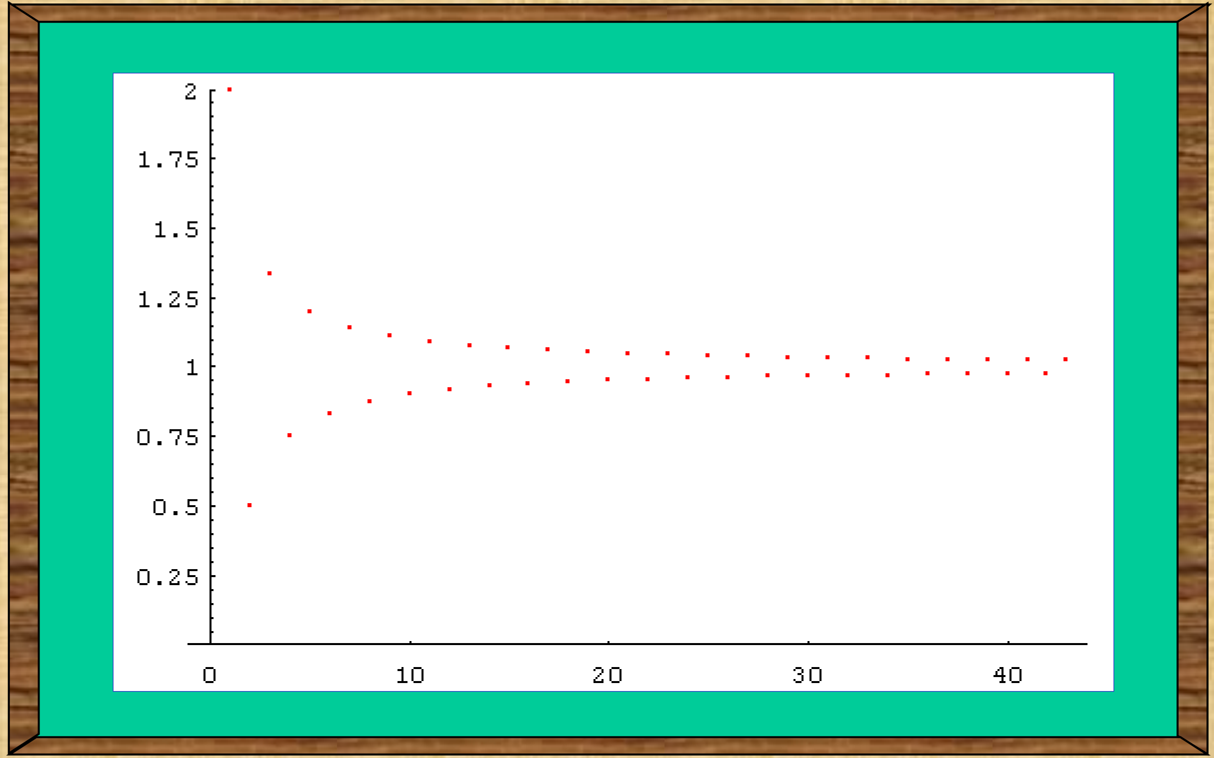
数列演示：$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$



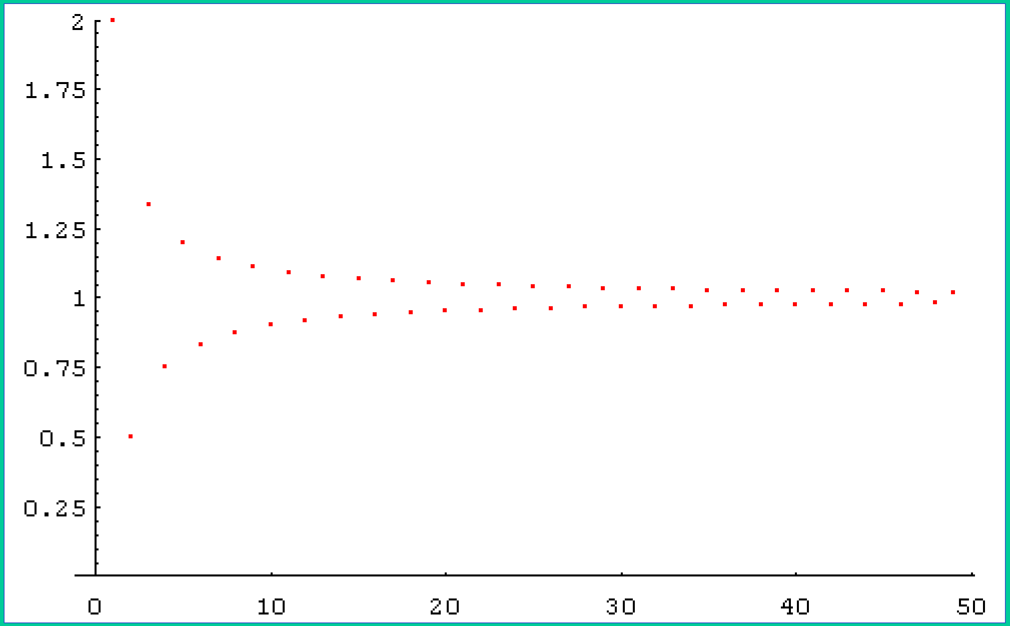
数列演示：$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$



数列演示：$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



数列演示：$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$



观察发现：

x_n的变化趋势只有两种：

不是无限地接近某个确定的常数，就是不接近于任何确定的常数。

由此，得到数列极限的描述性定义如下：

数列极限的描述性定义：

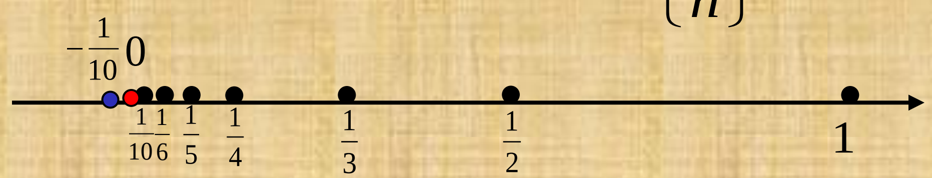
对于数列{a_n }，如果当n无限增大（即$n\to\infty$）时，a_n无限接近于一个确定的常数A，则称A为$n\to\infty$ 时数列{a_n }的极限，或称数列{ a_n }收敛于A．记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

如果数列没有极限，则称数列是发散的。

根据数列的描述性定义：

问题1： 在数列的项无限趋近于0的过程中，实际上数列的项也越来越趋近于常数－0.1，可为什么我们不说该数列的极限是－0.1呢？

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$



问题2: “无限接近”意味着什么?如何用数学语言描述“当n无限增大时，x_n无限接近于a”.

对数列 $x_n = 1 + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 进行分析:

$$\Theta \quad |x_n - 1| = \left|(1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}) - 1\right| = \frac{1}{n}$$

只要n足够大, x_n与1的距离,

即$\dfrac{1}{n}$可以小于任意给定正数

所以n无限增大时, x_n无限接近1

一般的,无论给定的ε多么的小,总存在一正整数N,使得当$n > N$时,不等式$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$都成立.这就是$n \to \infty$时,$x_n$无限接近于的实质.

3.数列极限的精确定义：

定义2 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n > N$时的一切x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立．那么就称常数a是数列x_n的**极限**，

记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

或 $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

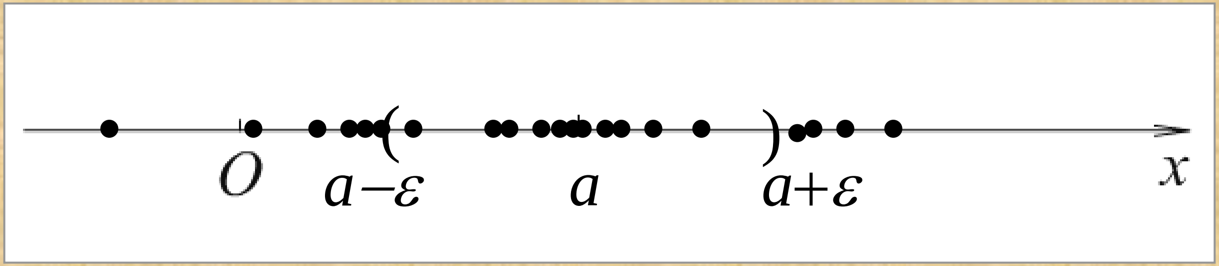
注:

①此定义习惯上称为极限的ε—N定义，它用两个动态指标ε和N刻画了极限的实质，用$|x_n-a|<\varepsilon$定量地刻画了x_n与a之间的距离任意小，即任给$\varepsilon>0$标志着“要多小”的要求，用$n>N$表示n充分大。

②定义中的ε具有二重性：一是ε的任意性，二是ε的相对固定性。ε的二重性体现了x_n逼近a时要经历一个无限的过程，但这个无限过程又要一步步地实现，而且每一步的变化都是有限的。

4.数列极限的几何意义:

这就表明数列x_n所对应的点列除了前面有限个点外都能凝聚在点a的任意小邻域内，同时也表明数列x_n中的项到一定程度时变化就很微小，呈现出一种稳定的状态，这种稳定的状态就是人们所称谓的“收敛”。



例1 设$x_n \equiv C$(C为常数), 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 对于一切自然数n,

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{成立},$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明:常数列的极限等于同一常数.

小结: 用定义证数列极限存在时,关键是任意给定$\varepsilon > 0$,寻找N,但不必要求最小的N.

二、收敛数列的性质

1. 有界性

定义 对数列x_n,若存在正数M, 使得一切自然数n,恒有$|x_n| < M$成立,则称数列x_n有界;否则,称为无界.

数轴上对应于有界数列的点x_n都落在闭区间$[-M, M]$上.

定理1 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 取$\varepsilon = 1$,

则$\exists N$,使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < 1$,

即有$a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, a-1, a+1\}$,

则对一切自然数n,皆有$|x_n| \le M$,故$\{x_n\}$有界.

注 有界性是数列收敛的必要条件,不是充分条件.

推论 无界数列必定发散.

2. 唯一性

定理2 每个收敛的数列只有一个极限.

证明：(反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,

a≠b 不妨设 a ＜ b

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,

$\exists N_1, N_2$.使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$; $\Rightarrow$ $x_n < \dfrac{a+b}{2}$

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$; $\Rightarrow$ $x_n > \dfrac{a+b}{2}$

取$N=\max\{N_1, N_2\}$, 则当$n>N$时,同时有

$$x_n < \frac{a+b}{2} \qquad x_n > \frac{a+b}{2}$$

矛盾，这说明结论成立

3. 保号性

定理3 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0\,(a < 0)$, 则$\exists N > 0$, 当$n > N$, 有$x_n > 0\,(x_n < 0)$.

证 $a > 0$ 由定义, 对 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0 \exists N > 0$,当$n > N$时,

有 $|x_n - a| < \frac{a}{2}$,

从而 $x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$

分析:

当$n\to\infty$，　$x_n\to a$.

$\Leftrightarrow$当$n\to\infty$，　$|x_n-a|\to 0$.

$\Leftrightarrow$当$n\to\infty$，　$|x_n-a|$可以任意小，要多小就能有多小.

（ε为事先给定的任意小的正数）.

$\Leftrightarrow$当n增大到一定程度以后，$|x_n-a|<\varepsilon$,

因此，如果 n 增大到一定程度以后，$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数，则当n无限增大时，x_n无限接近于常数a.

验证:

给定$\varepsilon=\frac{1}{100}$, 由$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$, 只要$n>100$时，有$|x_n-1|<\frac{1}{100}$,

给定$\varepsilon=\frac{1}{1000}$, 只要$n>1000$时，有$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$,

给定$\varepsilon=\frac{1}{10000}$, 只要$n>10000$时，有$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$,

给定$\varepsilon>0$, 只要$n>N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$时，有$|x_n-1|<\varepsilon$成立.

注意： 数列极限的定义未给出求极限的方法.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $\left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon>0$，要 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，或 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，

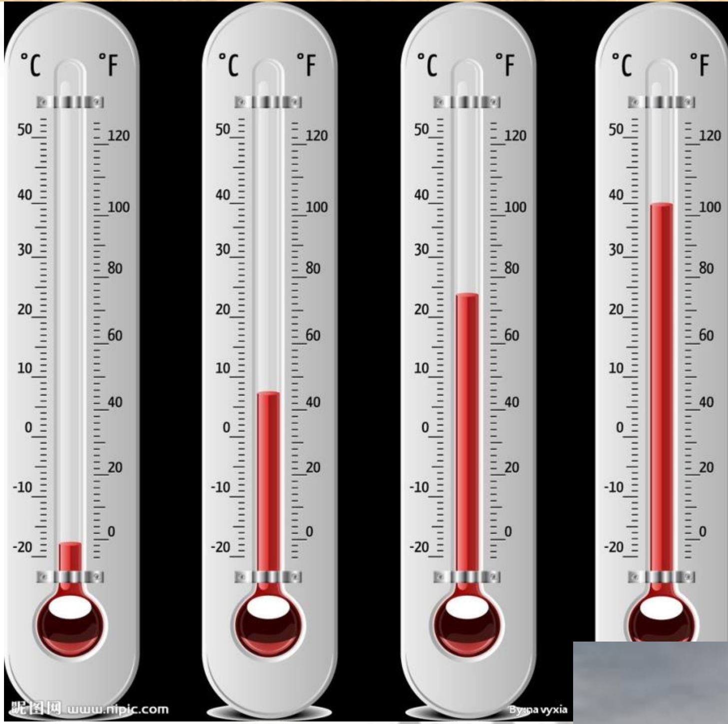
所以，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，

就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

§1.5 函数的连续性

一、函数的连续性

二、函数的间断点


°C
°F
www.nipic.com


非凡图库
WWW.FFPIC.COM

1.增量：

设变量 u 从初值 u_0 变到终值 u_1，其中之差 $u_1 - u_0$,

称之为变量 u 在 u_0 处的增量，记为：$\Delta u = u_1 - u_0$.

说明：

（1）Δu 是一个整体记号，并不表示 Δ 与变量 u 的乘积。

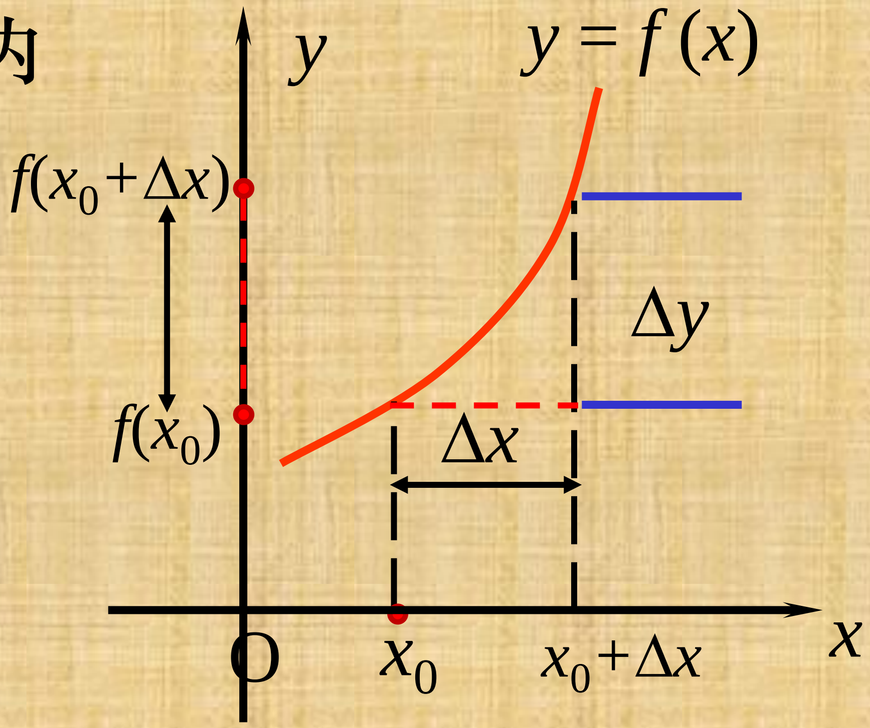
（2）Δu 可以取正值、负值或零.

2. 函数的增量

设函数 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有定义,

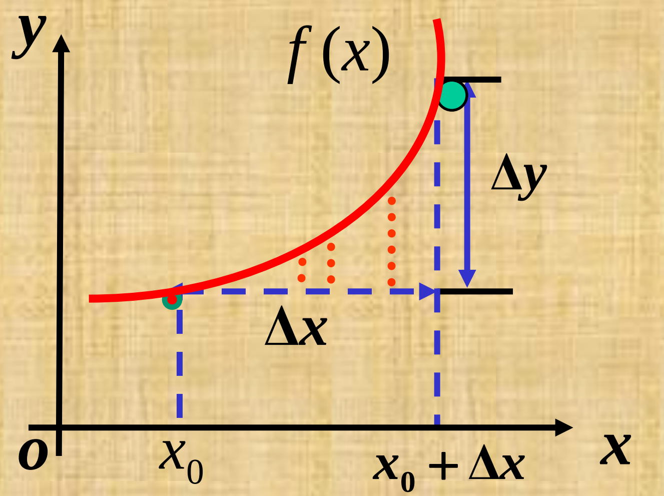
函数 $f(x)$在点x_0相应于Δx的增量:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$



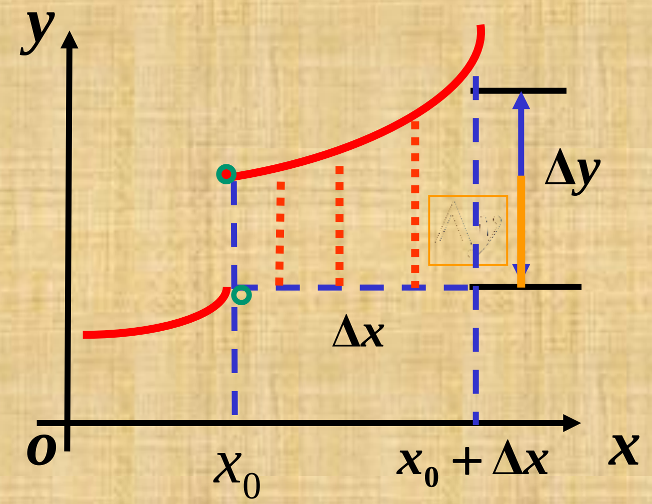
3. 函数 $y=f(x)$在点x_0连续的几何特征

函数 $f(x)$在点x_0连续



当：$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \to 0$

函数 $f(x)$在点x_0不连续



当：$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \not\to 0$

函数$y=f(x)$在点x_0连续： 自变量的改变量△x→0时，
函数的改变量 △y→0

函数在点x_0连续增量形式的定义:

定 义 设 $f(x)$ 在 点x_0 的某邻域内有定义,

若自变量 的改变量Δx, 相应地 函数的改变量 Δy 也趋于零

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

此定义用于证明函数的连续性

函数连续极限形式的定义:

设函数 $y=f(x)$ 在 点x_0 的邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

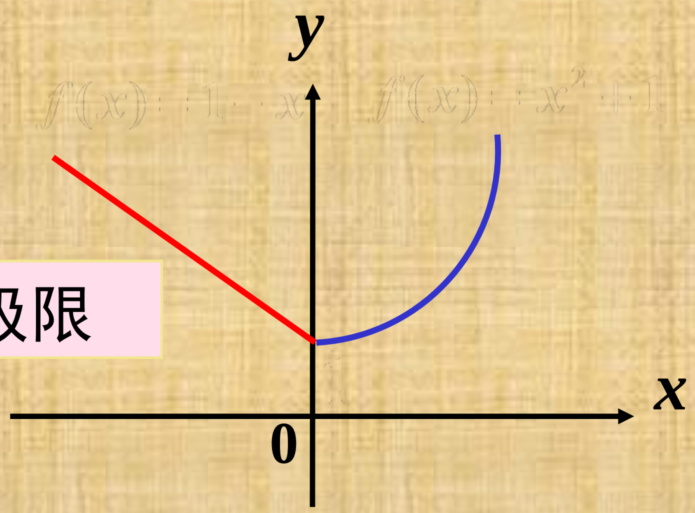
此定义常用于判断
分段函数分段点
的的连续性

例1 证明函数$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+1, & x\ge 0,\end{cases}$在$x=0$处连续

证明 1. 求函数值 $f(0)=1$

2. 求极限值

分段点两边函数表达式不同需分左右极限



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

3. 判断 ① $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 1. 求函数值: $f(0)=2$

2. 求极限值: 需分左右极限

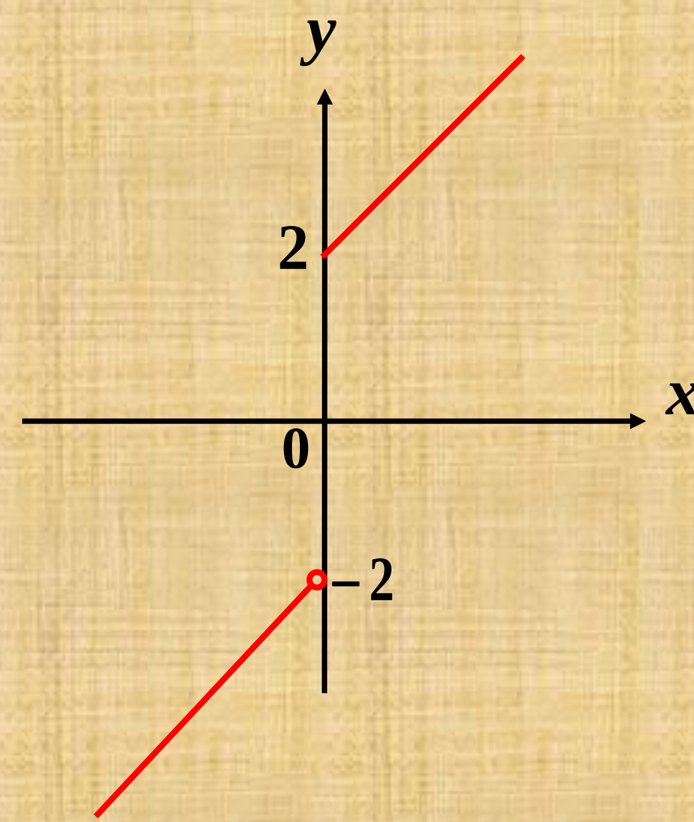
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-2)=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)\neq \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$\therefore$ 极限不存在。

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续

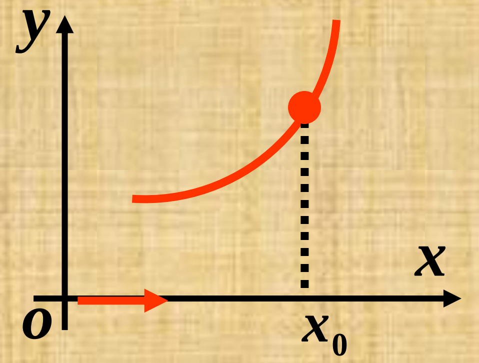


4. 函数左、右连续的概念

(1)设函数 $f(x)$ 在左邻域 $(x_0-\delta, x_0]$ 内有定义.

若左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

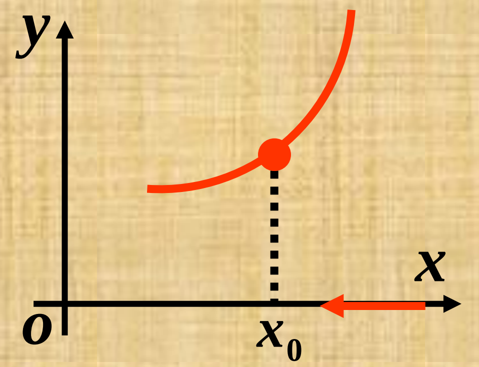
则称 $f(x)$ 在 x_0 点处**左连续**.



(2) 设函数 $f(x)$ 在右邻域 $[x_0, x_0+\delta)$ 内有定义.

若右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

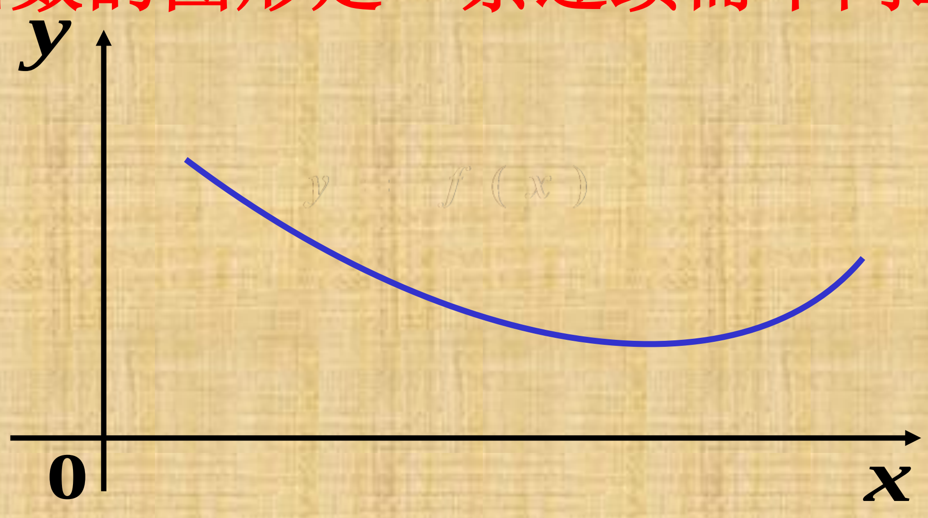
则称 $f(x)$ 在 x_0 点处**右连续**.



5. 函数在闭区间上连续定义

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且 $f(x)$ 在左端点 a 处右连续, 在右端点 b 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续 .

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.



二. 函数的间断点

$f(x)$在x_0点连续，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

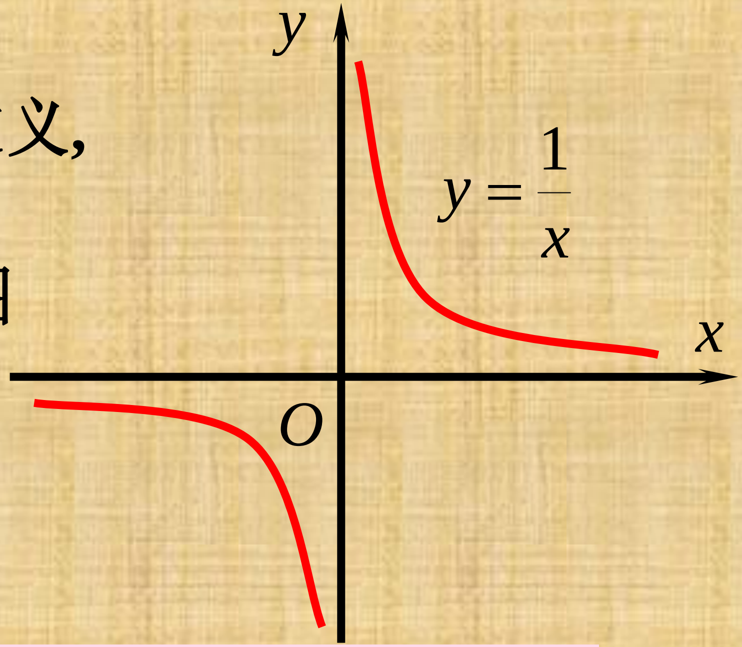
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足, 则称函数$f(x)$在点x_0处不连续(或间断), 并称点x_0为$f(x)$的不连续点(或间断点).

例3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性

解 Θ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 无定义,

$x=0$为函数的间断点, 如图



又Q $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$,

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, 所以称它为无穷间断点.

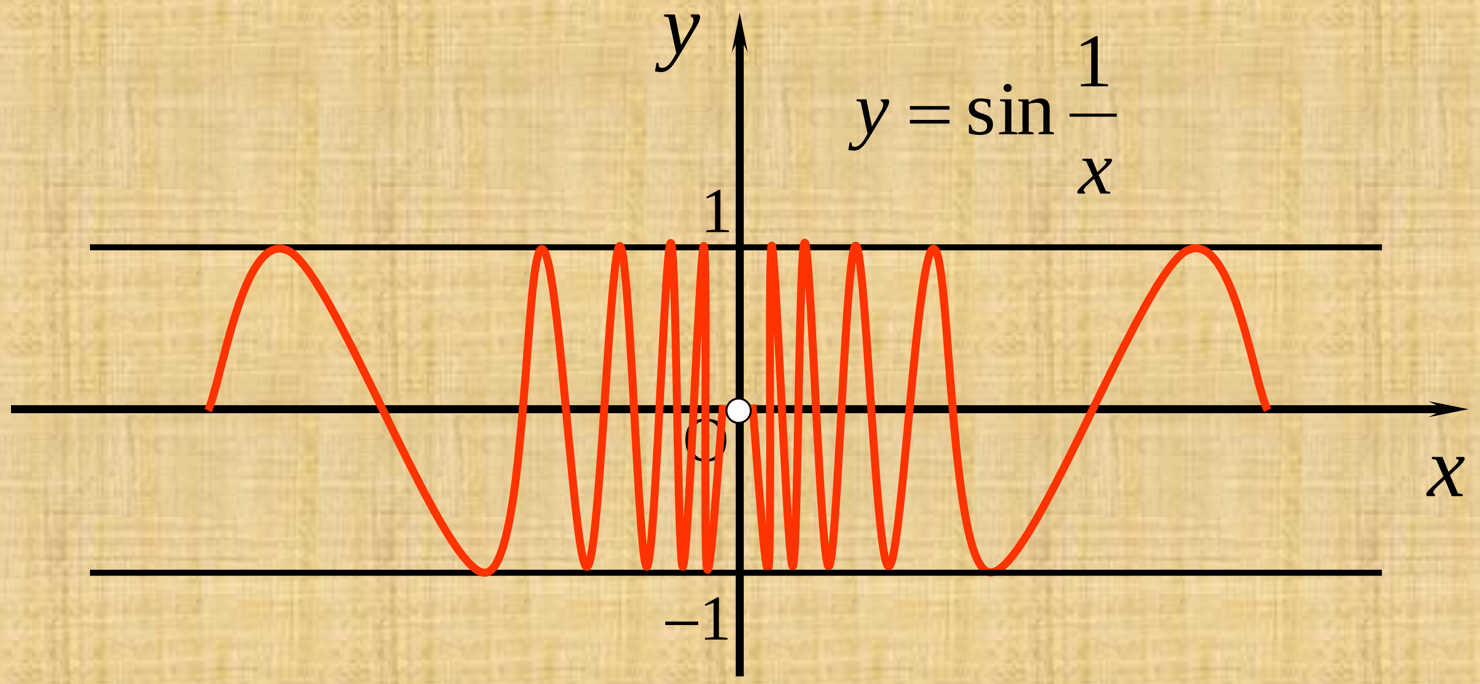
例4 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性

解 $\Theta\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义,

$\therefore x=0$ 为函数的间断点

又知 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,

看看该函数的图形.



称 $x = 0$为 $y = \sin\frac{1}{x}$震荡间断点.

第二类间断点

无穷间断点

震荡间断点

共同特征

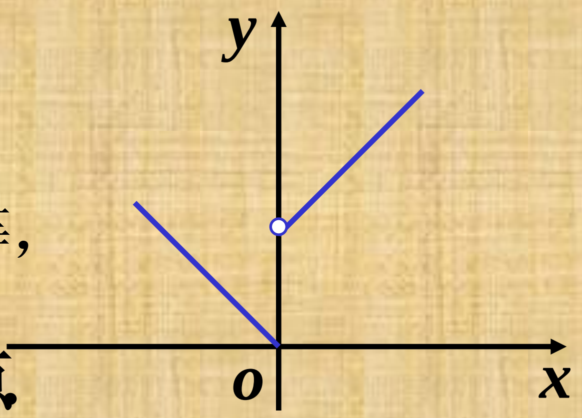
该点处的极限不存在

例5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ 1+x, & x>0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1,$

左极限与右极限存在但不相等,

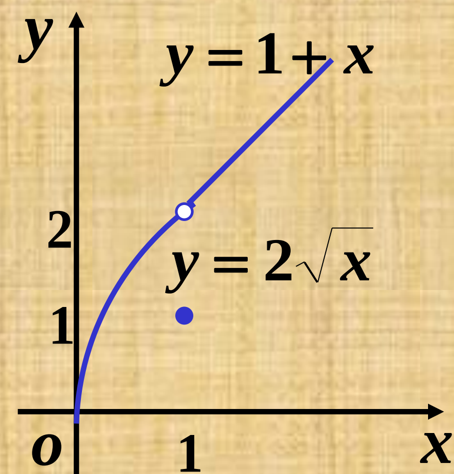
$\therefore$ $x=0$ 为函数的跳跃间断点.



例6 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

在$x=1$处的连续性.



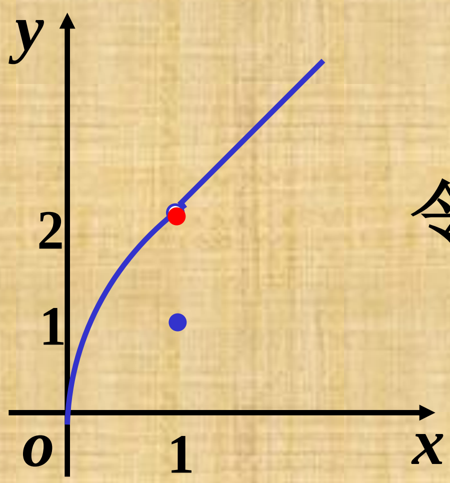
解 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2,$

$\Theta\ f(1)=1,\ \therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=2\ne f(1),$

称$x=1$为可去间断点。

注意　可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

如例6中，



令 $f(1)=2$,

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

三. 小结

一、连续函数的概念

- 极限形式
- 增量形式

二、函数的间断点

- 第一类间断点
- 第二类间断点

§2.1 导数的概念

一、实际问题举例

二、导数的概念

一、实际问题举例

奇怪的平均速度

运动员相对于水面的高度h（米）与起跳后的时间t（秒）存在函数关系：

$$h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$$

计算运动员在$0 \le t \le \frac{65}{49}$内的平均速度？

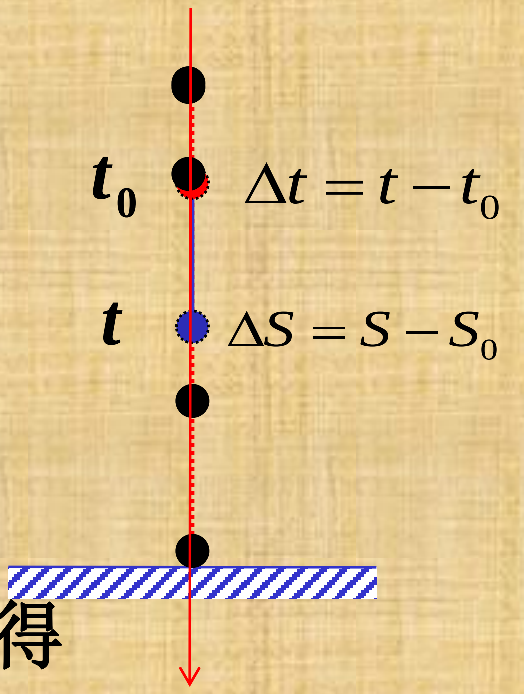
平均速度为 0 ？

如何求非匀速直线运动的瞬时速度速度呢？

引例1 自由落体运动的瞬时速度问题

如图 物体的运动方程是：$S=\dfrac{1}{2}gt^2$,

求 t_0 时刻的瞬时速度.



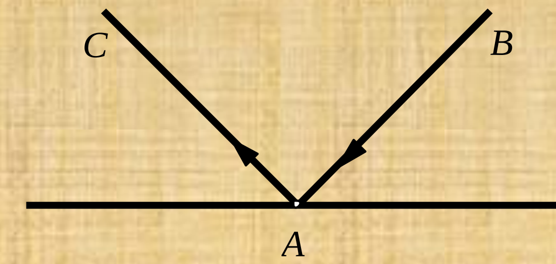
解 取一邻近于 t_0 的时刻 t，运动时间 Δt,

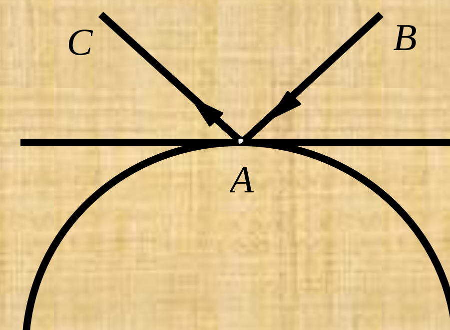
平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s-s_0}{t-t_0}$

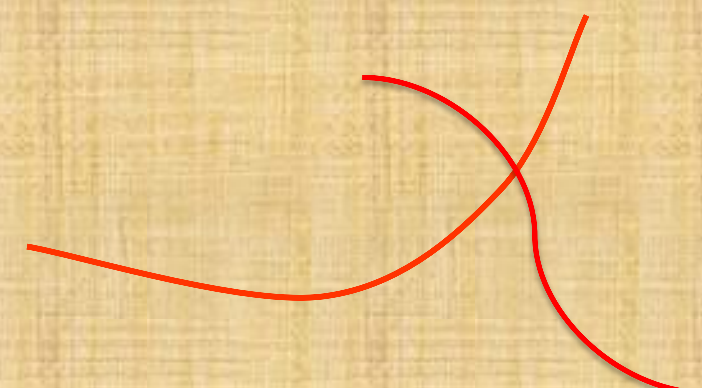
当 $t\to t_0$ 时，即 $\Delta t\to 0$，**取极限得**

t_0 时刻的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0.$


www.jpl.nasa.gov

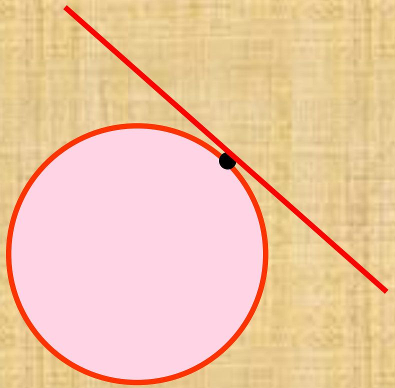

C
B
A


C
B
A

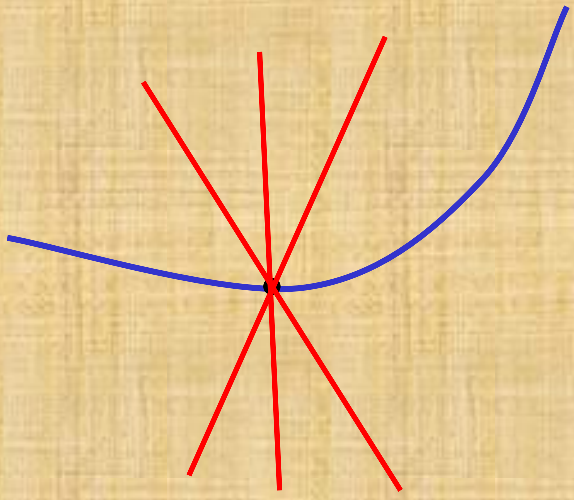


引例2 曲线切线的斜率

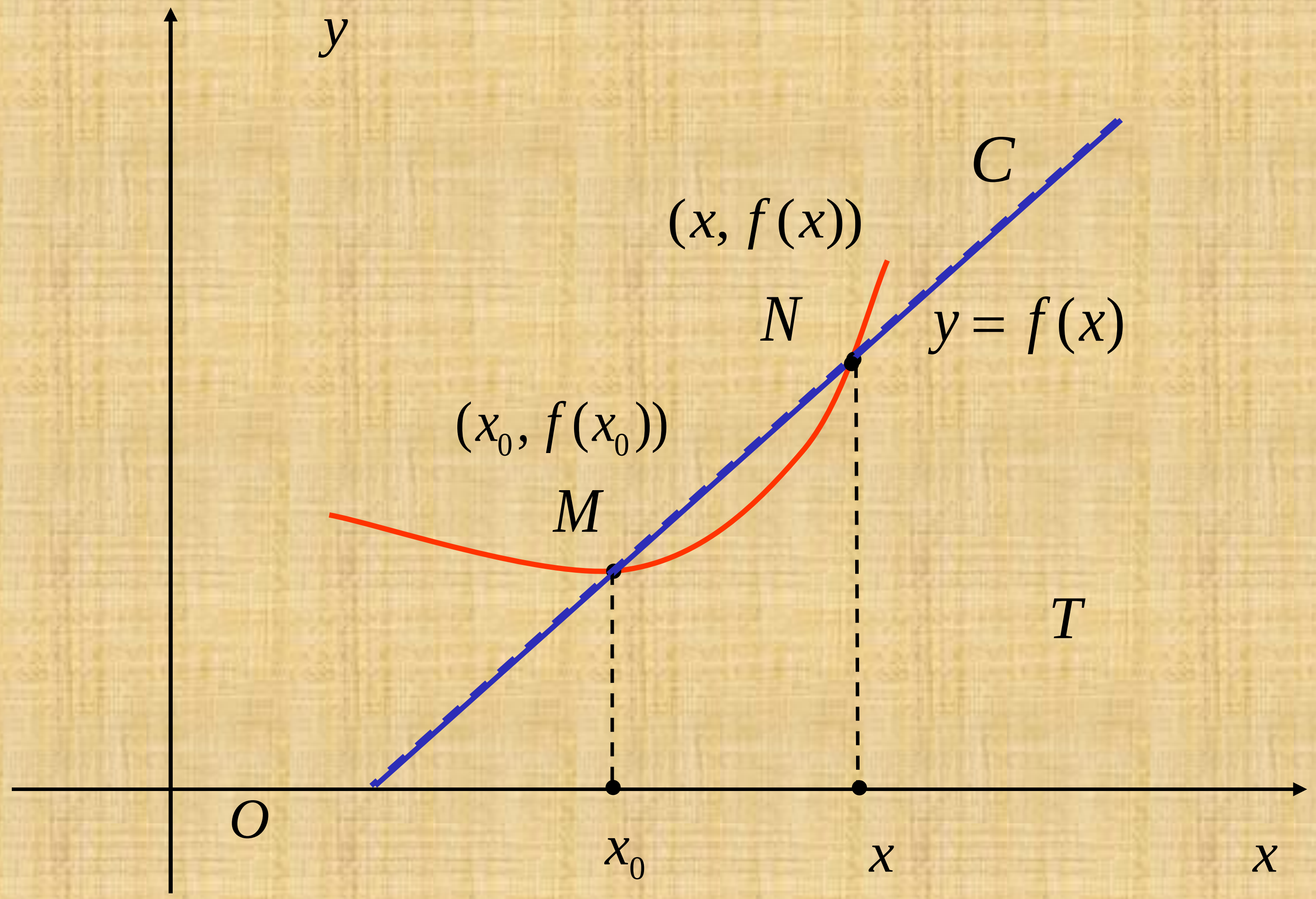
圆的切线定义：与圆只有一个交点的直线。



一般曲线的切线：

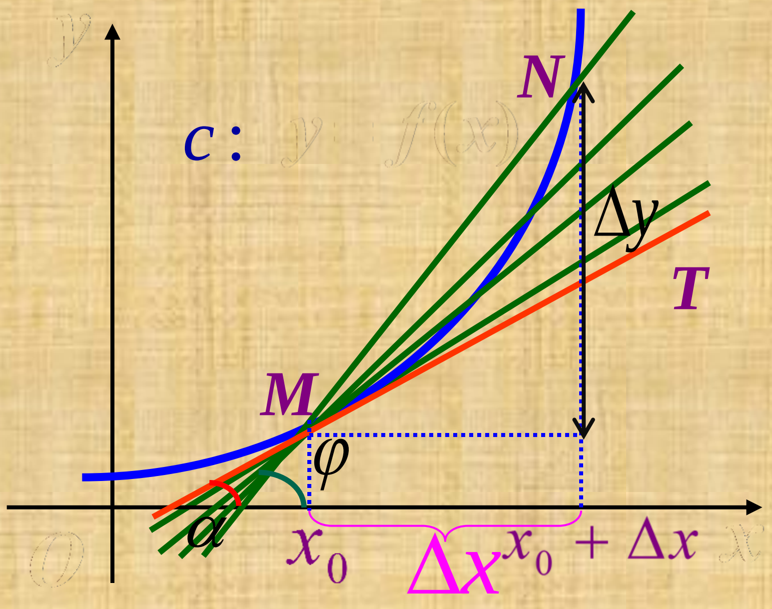


1. 割线的极限位置——切线位置



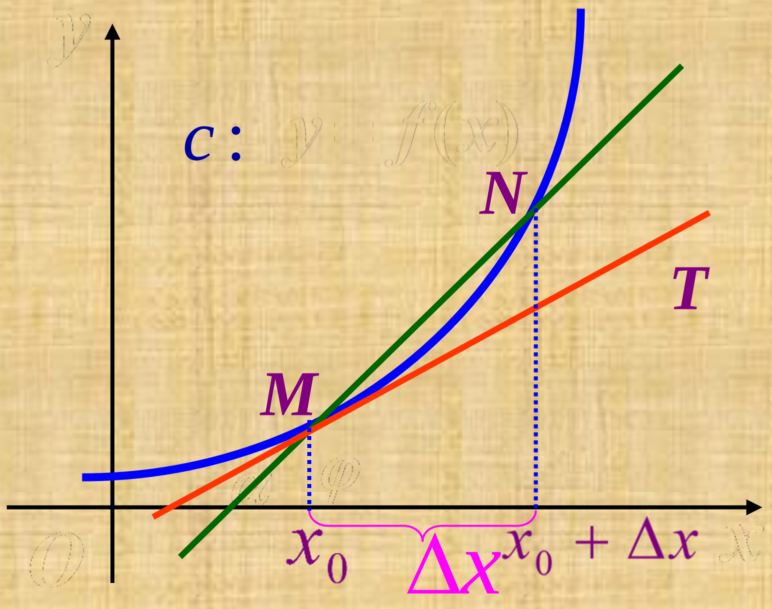
割线 MN 的斜率:

$$\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



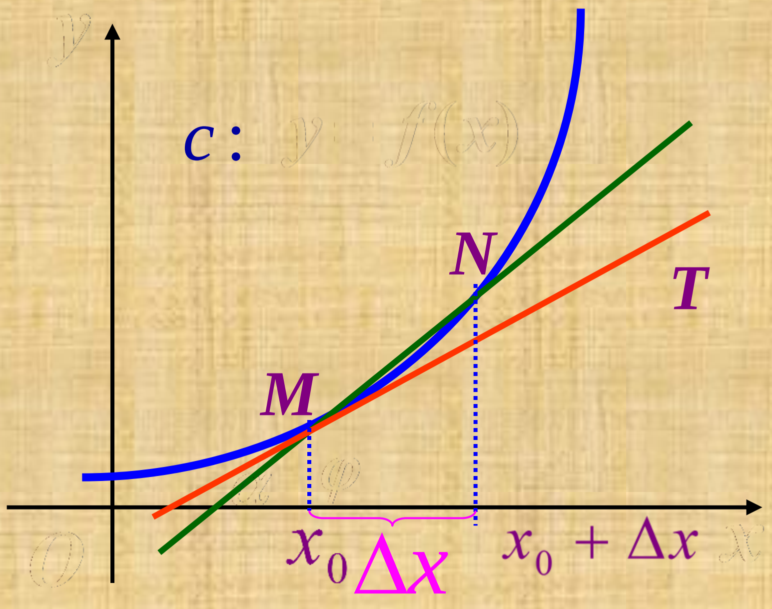
割线 MN 的斜率：

$$\tan\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

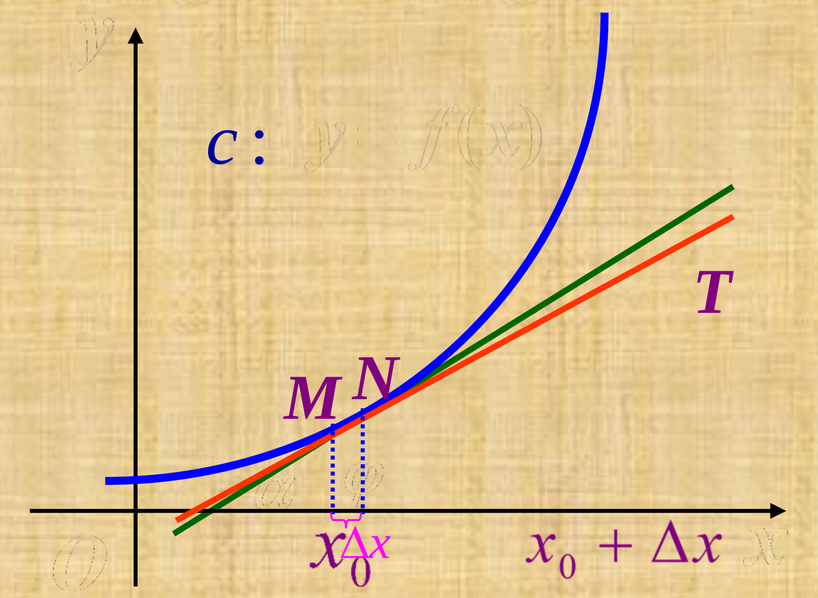


割线 MN 的斜率：

$$\tan\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



割线 MN 的斜率：



$$\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

割线趋近于切线 $\Leftrightarrow \Delta x\to 0$

切线 MT 的斜率：

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

瞬时速度： $v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

切线斜率： $\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

两个问题的**共性**:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似的问题还有： **角速度、线密度、电流强度等**

定义1 设$y = f(x)$在x_0的某邻域有定义，取x_0点处自变量的增量为$\mathrm{V}x$,相应函数的增量为$\mathrm{V}y$,

$$若\lim_{\mathrm{V}x \to 0} \frac{\mathrm{V}y}{\mathrm{V}x}存在,$$

则称$y=f(x)$在x_0处可导，该极限值称为$y=f(x)$在x_0的导数，

记作 $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$,

$$即 f'(x_0) = \lim_{\mathrm{V}x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\mathrm{V}x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\mathrm{V}x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

其它形式:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

导函数 如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导.

对于任一 $x \in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.

记作 $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

$$\text{即 } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad x \in I$$

$$\text{或 } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad x \in I$$

求导数举例

步骤: (1)求增量: $f(x+\Delta x)-f(x)$

(2)算比值: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(3)取极限: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

例1 求函数 $f(x)=C$(C为常数)的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0.$$

即 $$(C)'=0.$$

例2 求函数 $y=x^3$的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

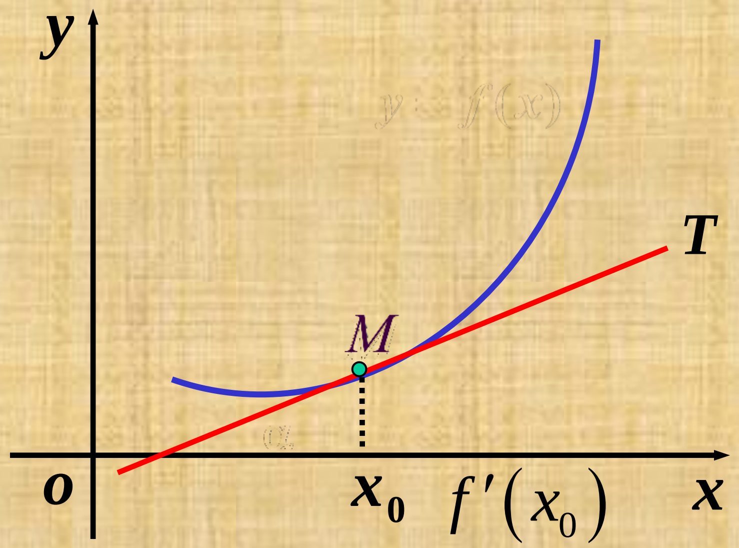
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right]=3x^2$$

二. 导数的几何意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程为:$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

例3 求等边双曲线$y=\dfrac{1}{x}$在点$(\dfrac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k = y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

所求切线方程为$y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$，即$4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$，即$2x-8y+15=0.$

§2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、微分的几何意义

三、微分的计算

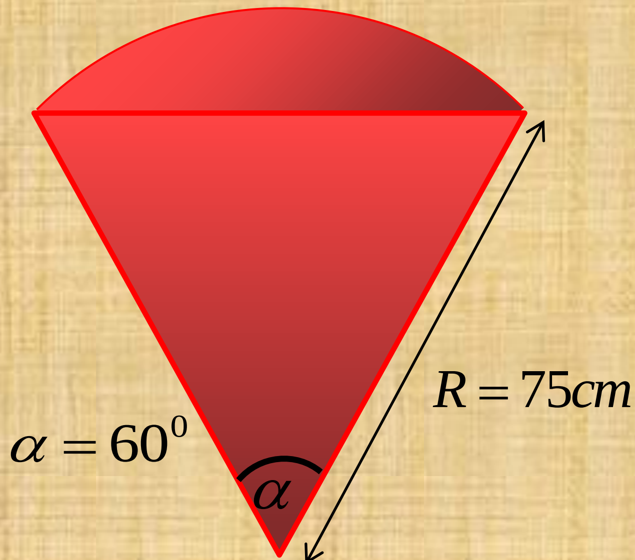
一、微分的概念

1. 微分诞生的背景

在工程技术中，常会遇到这类问题

当自变量有微小的增量时，计算函数的相应的增量。

用简便的计算方法来计算增量的近似且又有较好的精确度？

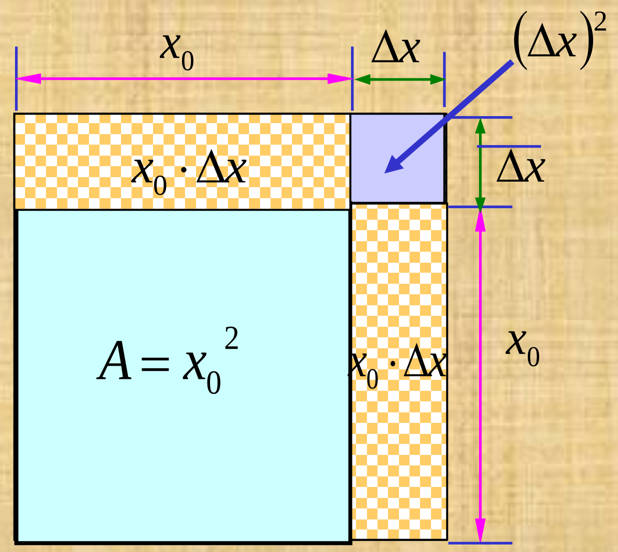


R增加$0.125cm$，扇形面积改变了多少？

$$S = \frac{n\pi R^2}{360}$$

2. 引例 求正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,



Θ 正方形面积 $A = x^2$,

$$\therefore \Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$

(1) Δx的线性(一次)函数, 且为ΔA的主要部分;

(2) Δx的高阶无穷小, 且为ΔA的次要部分; 当$|\Delta x|$很小时可忽略.

即$\Delta A \approx 2x_0 \Delta x$.

$\Delta A = 2x_0 \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ **特殊函数** $A = x^2$

$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ **一般函数** $y = f(x)$

Δx很小时， $\Delta y \approx A \cdot \Delta x$

既容易计算又是较好的近似值

对一般函数 $y = f(x)$, 如果存在这样的近似公式, 则无论在理论分析上还是在实际应用中都是十分重要的.

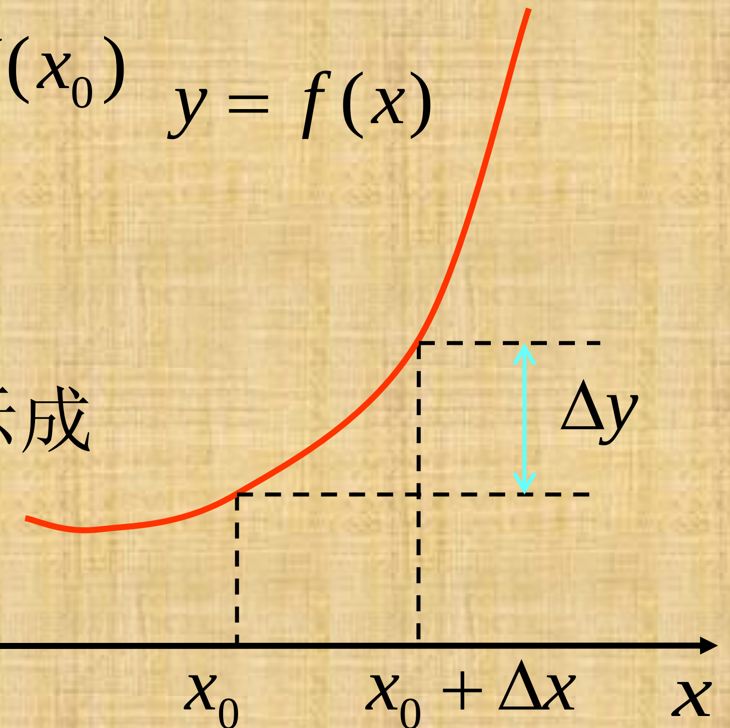
定义 设函数$y=f(x)$定义在点x_0的某邻域$U(x_0)$内，当给x_0一个增量Δx，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$
相应地函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果存在常数A，使得Δy能表示成

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0**可微**，



称$\boxed{A\cdot\Delta x}$为函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的**微分**，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，$df(x_0)=A\cdot\Delta x.$

满足什么条件的函数是可微的呢？
微分的系数A如何确定呢?
微分与导数有何关系呢?
下面的定理回答了这些问题.

定理 函数 $f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点x_0处可导，且 $A=f'(x_0)$

3. 可微函数

若函数$y = f(x)$在区间I上每一点都可微，则称f为I上的可微函数。

函数$y = f(x)$在I上任一点x处的微分，称为函数的微分，记作dy或$df(x)$，

即 $\boxed{dy = f'(x)\Delta x}$， $x \in I$

与x和Δx有关

例1　已知 $y=x$，求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=(x)'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x,$

由于 $y=x$, 故得

即 $\mathrm{d}x=\Delta x.$

上例表明: 自变量的增量就是自变量的微分 : $\Delta x=\mathrm{d}x$

$$\therefore dy=f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

4. 概念深化

问题1： 微分定义中，使用Δy的线性函数AΔx来近似代替数Δy，可以看成是等价无穷小替换吗？

问题2： 微分定义中，Δ和d有区别吗？

对于微分符号的说明：Δ=deirta为希腊字母，表示“差”，d为罗马字母，differentias表示“差”的含义

问题3： 微分与导数的区别与联系

若使用增量的线性主部的方法求微分，计算往往很难，但是，使用公式dy=f′（x）dx，则很容易计算微分，微分中涉及的增量与变换率有关，这是两者的联系。

二、微分的几何意义

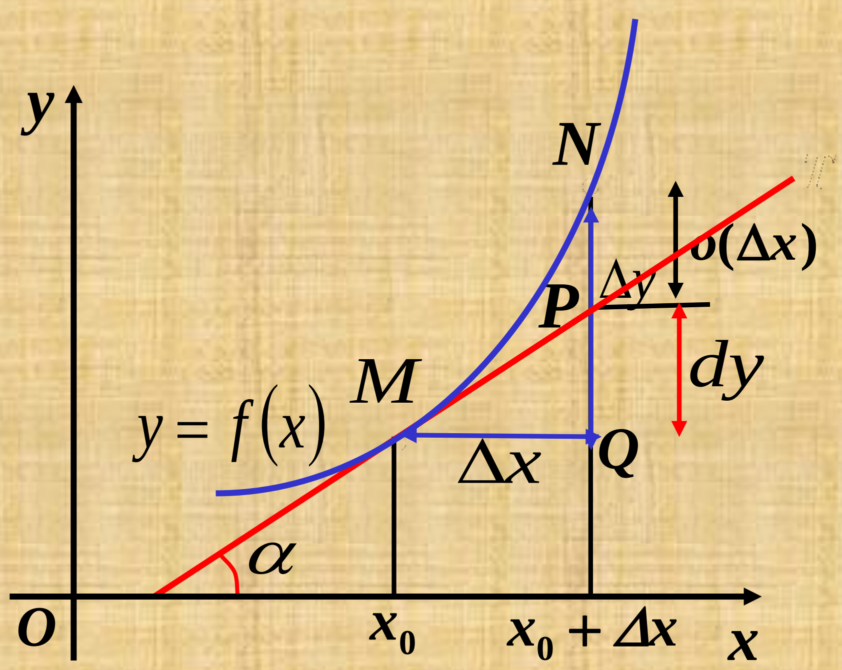
(如图)

当Δy 是曲线的纵坐标增量时;

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\tan\alpha \cdot \Delta x = PQ = \mathrm{d}y}$$

d*y* 就是切线纵坐标对应的增量,



几何上，函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分表示为：相应于自变量 x 的增量 Δx，曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 的切线上纵坐标的增量.

例2 $y = x^3$,求(1) $\mathrm{d}y$, (2) $\mathrm{d}y\big|_{x=2}$, (3) $\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}$

解 $y' = 3x^2$

$$(1)\ \mathrm{d}y = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x$$

$$(2)\ \mathrm{d}y\big|_{x=2} = 3x^2\big|_{x=2}\Delta x = 12\Delta x$$

$$(3)\ \mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

三、微分公式与运算法则

微分的基本求法

函数的导数，乘以自变量的微分.

$$\mathrm{d}\,y = f'(x)\cdot dx$$

微分的基本公式与导数的基本公式相似

1. 基本微分公式

$$\mathrm{d}(C)=0 \qquad \mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

2. 运算法则 $(u=u(x), v=v(x)$均为可导函数$)$

$$\mathrm{d}(u \pm v)=\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^{2}}$$

(1)当$f'(x_0)\neq 0$时,有

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\cdot\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{f'(x_0)}\cdot f'(x_0)\boxed{=1}.$$

从而,当$\Delta x\to 0$时,$\Delta y\sim dy$. $\boxed{\Delta y=dy+o(dy)}$.

主部,又由于$dy=f'(x_0)\Delta x$是Δx的

线性函数,所以在 $f'(x_0)\neq 0$ 条件下,

称dy是Δy的 线性主部.(当$\Delta x\to 0$).

微分的实质

§3.3 曲线的凹凸性与拐点

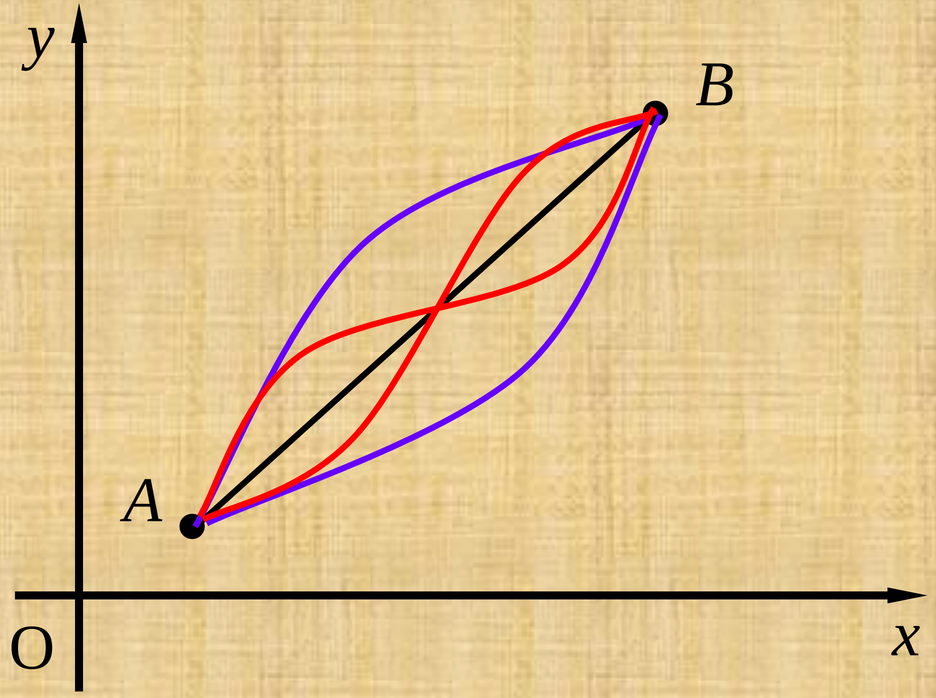
一、曲线的凹凸性

二、曲线的拐点

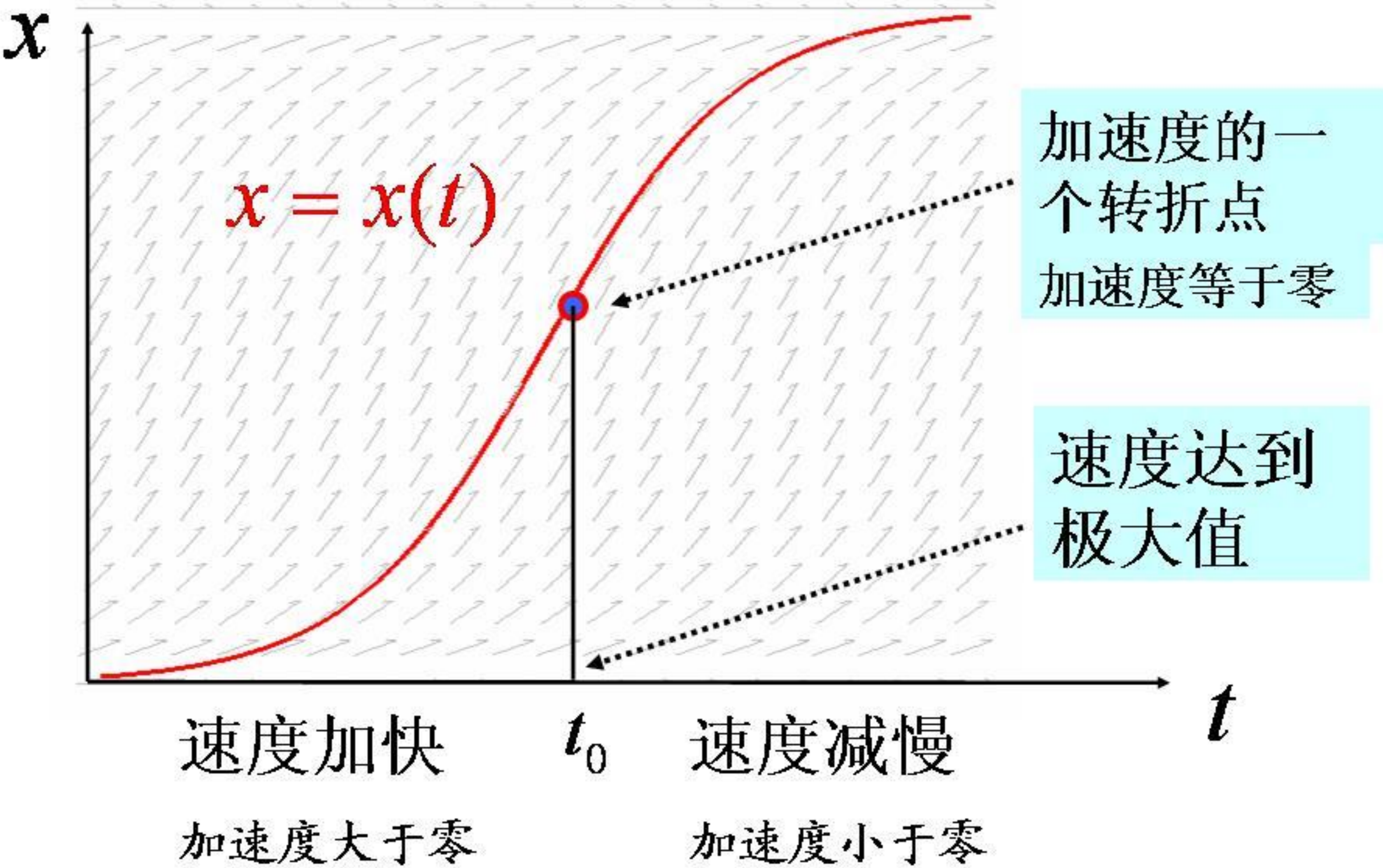
一、曲线的凹凸性

问题：设一个函数单调增加，

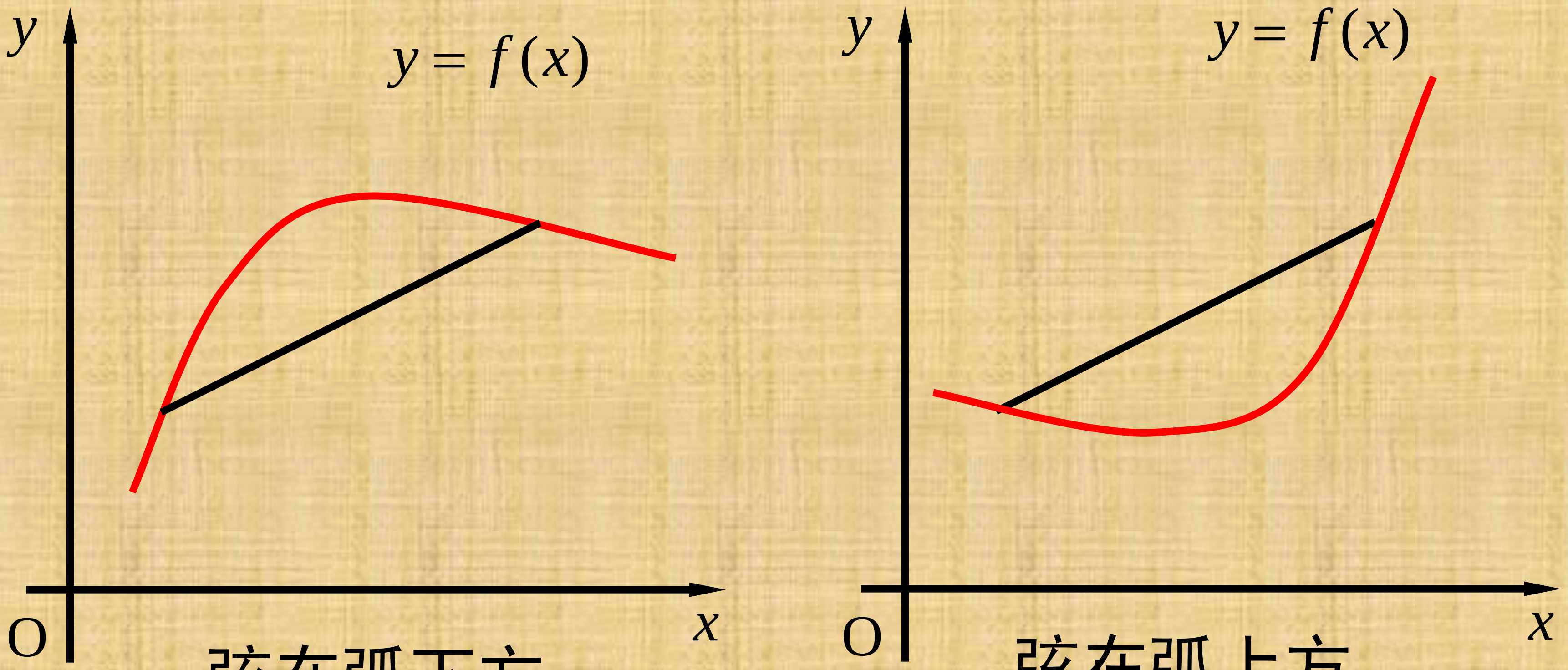
你能画出函数所对应的曲线图形吗？



设作直线运动的物体的运动方程是：$x=x(t)$

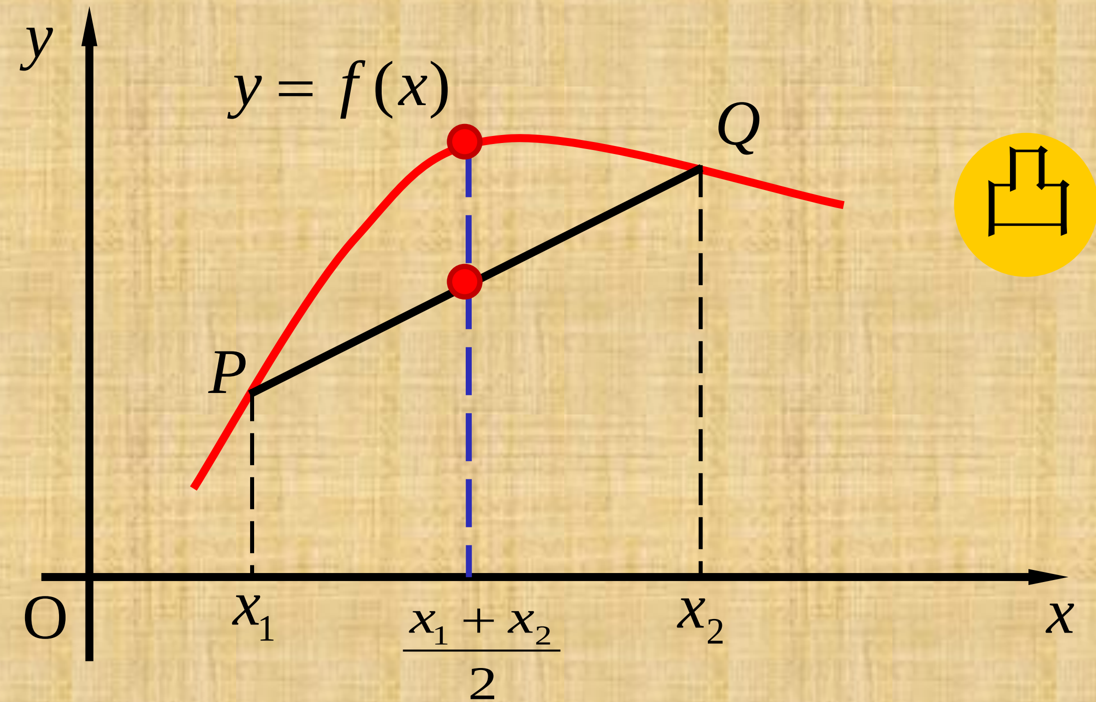


观察：以下曲线的弯曲方式



弦在弧下方

弦在弧上方

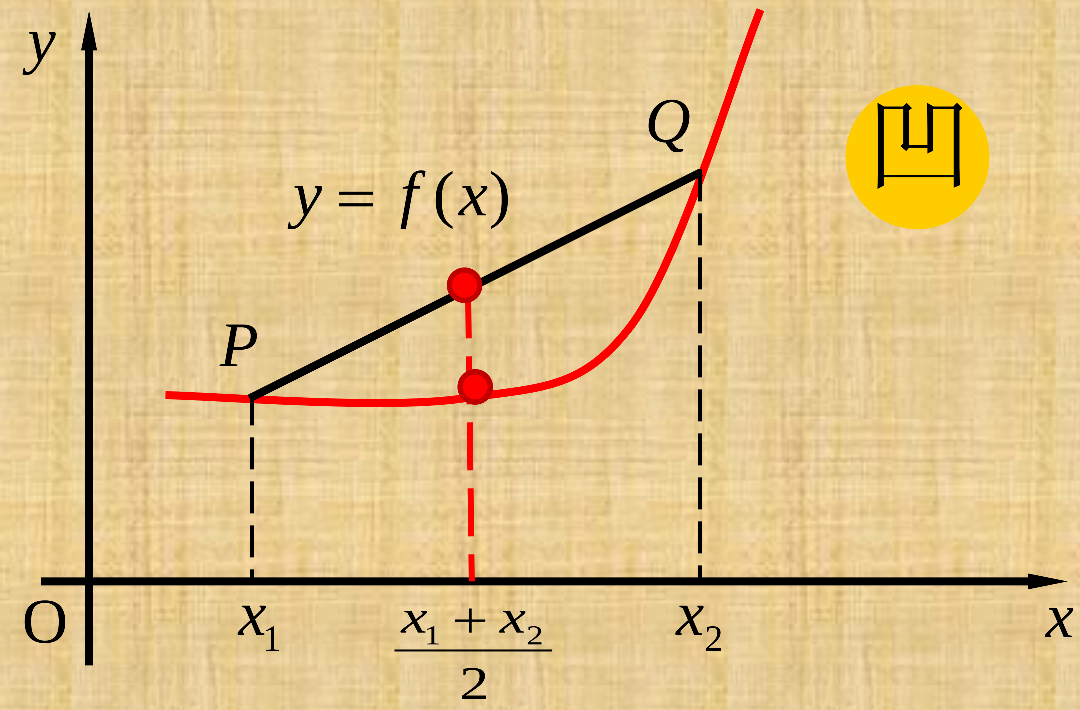


定义

如果 $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}\ (x_1 \neq x_2)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$$

成立，则称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凸的；

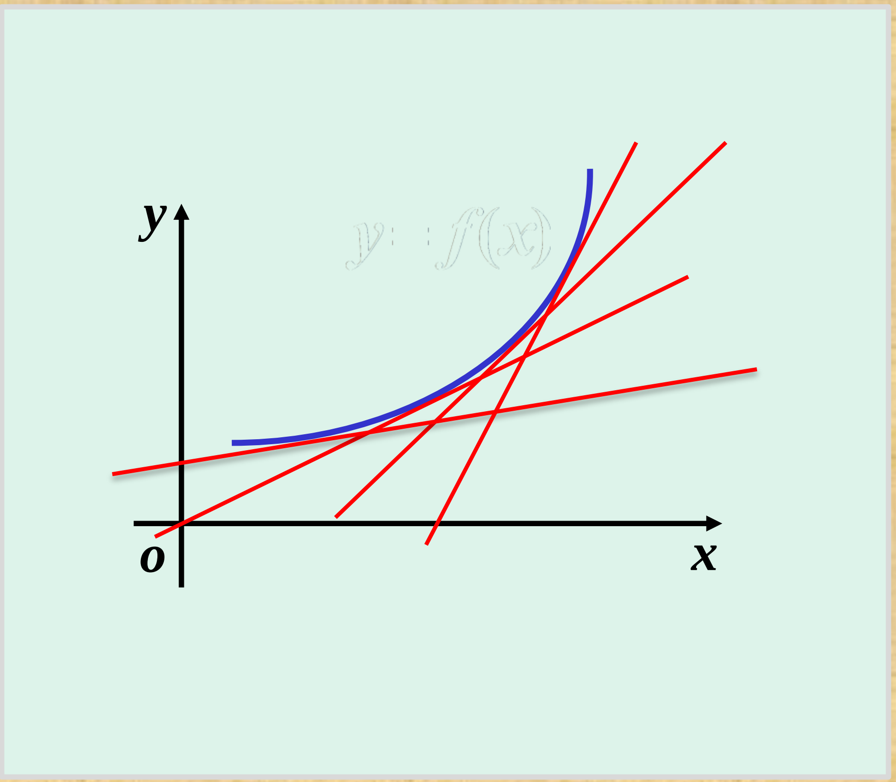


定义 如果 $\forall x_1, x_2 \in I\ (x_1 \neq x_2)$, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$$

成立，则称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是凹的 .

问题：如何判断曲线的凹凸性？

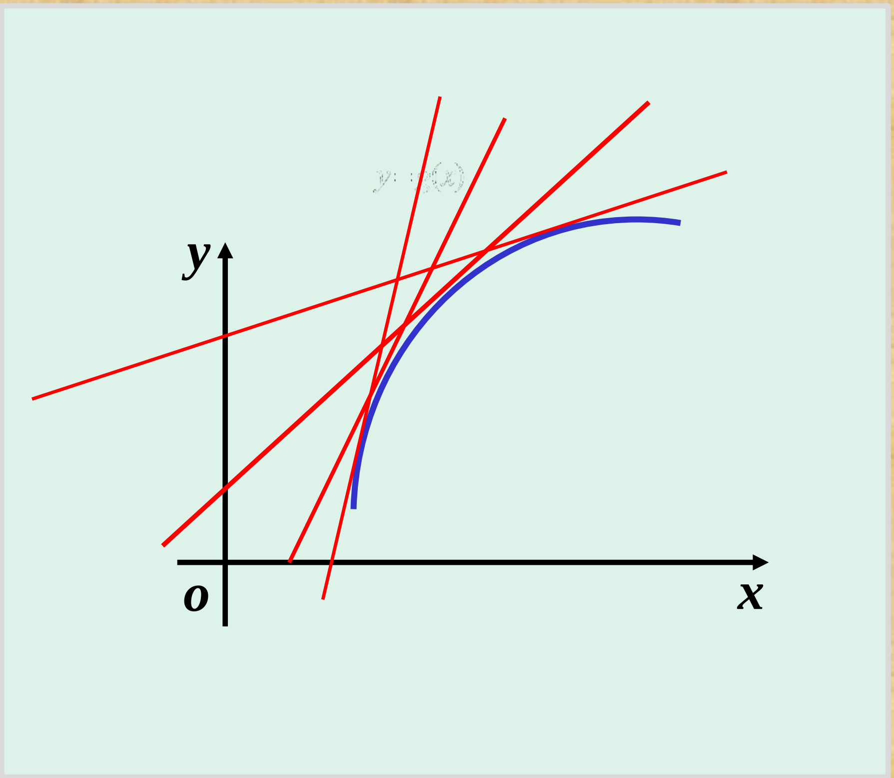


设曲线弧上凹

$\Rightarrow f'(x)$单调递增

$\Rightarrow f''(x) > 0$

问题：如何判断曲线的凹凸性？



设曲线弧上凸

$\Rightarrow f'(x)$单调递减

$\Rightarrow f''(x) < 0$

反之，能否用二阶导数的符号来判断曲线的凹凸？

答案是肯定的

定理(曲线凹凸的判定法)

设函数$y=f(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内二阶可导，则

(1) 若在(a,b)内 $f''(x)>0$，则曲线弧$y=f(x)$在$[a,b]$上为凹的.

(2) 若在(a,b)内 $f''(x)<0$，则曲线弧$y=f(x)$在$[a,b]$上为凸的.

分析：判别凸凹性主要是对

$$\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$$

进行比较.

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

有什么公式能把以上的函数值与

函数的二阶导数联系在一起呢?

泰勒公式

证明: 设 $f(x)\in C([a,\ b])$，在 $(a,\ b)$ 内有二阶导数.

$\forall\, x_1\,,x_2\in(a,\ b)$，令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则

$$\Theta\quad x_1-x_0=x_1-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1-x_2}{2}$$

$$x_2-x_0=x_2-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_2-x_1}{2}$$

$$\therefore\quad x_2-x_0=-(x_1-x_0)$$

由泰勒公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

有 $$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x_0)^2$$

其中, ξ_1 在 x_0 与 x_1 之间, ξ_2 在 x_0 与 x_2 之间.

于是 $$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))(x_1-x_0)^2$$

即 $$f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)=(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))(x_1-x_0)^2$$

若 $f''(x)<0,\ x\in(a,\ b)$, 则

$$f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)<0,$$

$$\boxed{x_0=\frac{x_1+x_2}{2}}$$

即 $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

故 $f''(x)<0,\ x\in(a,\ b)$时, 曲线 $y=f(x)$

在区间$[a,\ b]$上是凸的.

例1 判别曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的凹凸性.

解: 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2}{x^3}$,

所以 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y''<0$, $y=\dfrac{1}{x}$ 为凸的,

$x\in(0,+\infty)$ 时, $y''>0$, $y=\dfrac{1}{x}$ 为凹的.

例2　判定曲线弧 $y = x^3$ 的凹凸性.

解　所给曲线在$(-\infty,+\infty)$内为连续曲线弧.由于

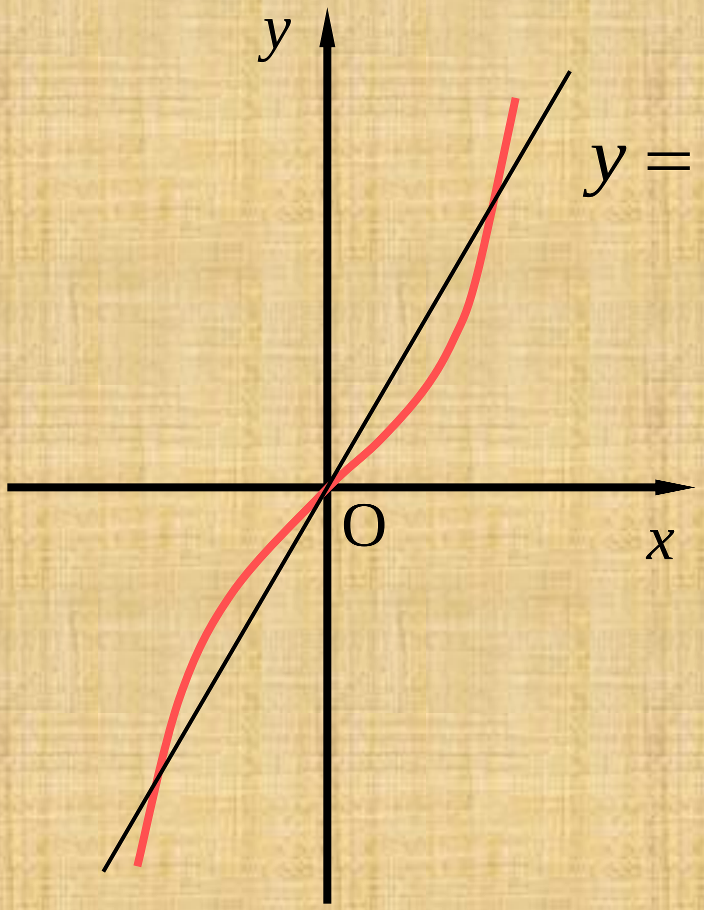
$$y' = 3x^2,\quad y'' = 6x,$$

令$y'' = 0$，得$x = 0$

$x \in (0,+\infty), y'' > 0$ 故$y = x^3$在$(0,+\infty)$上为凹的,

$x \in (-\infty,0), y'' < 0$ 故$y = x^3$在$(-\infty,0)$上为凸的,

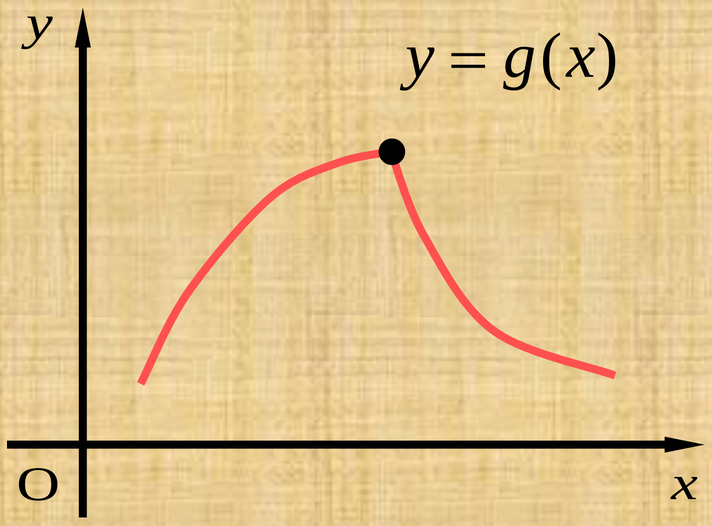
如图



点$(0,\ 0)$是曲线凹凸性的分界点.

二、曲线的拐点

定义 连续曲线弧上的凹弧与凸弧的分界点，称为该曲线弧的**拐点**.



如何寻找曲线的拐点呢？**分析**

求拐点的一般步骤：

(1) 求 $f(x)$ 的定义域(或确定讨论区间)；

(2)求出$f''(x)=0$的点和 $f''(x)$ 不存在的点；

$$x_1, x_{2\Lambda\Lambda}\, x_n$$

(3) 判断二阶导数在上述点两侧的符号，以确定该点是否出现拐点。

例3　**求曲线弧** $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$ **的拐点。**

解　所给函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x,$$

$$y'' = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2),$$

令 $f''(x) = 0$，解得 $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$(-\infty,1)$，$y'' > 0$　可知所给曲线弧在(-∞,1)(2, +∞)

$(1,2)$，$y'' < 0$　为凹的，在(1,2)内为凸的.

$(2,+\infty)$，$y' > 0$　拐点为点 (1,－3)与点 (2,6).

§4.1 不定积分的概念与性质

一、实际问题举例

二、原函数与不定积分的概念

三、不定积分的性质

一、实际问题举例

引例1 **已知速度求路程**

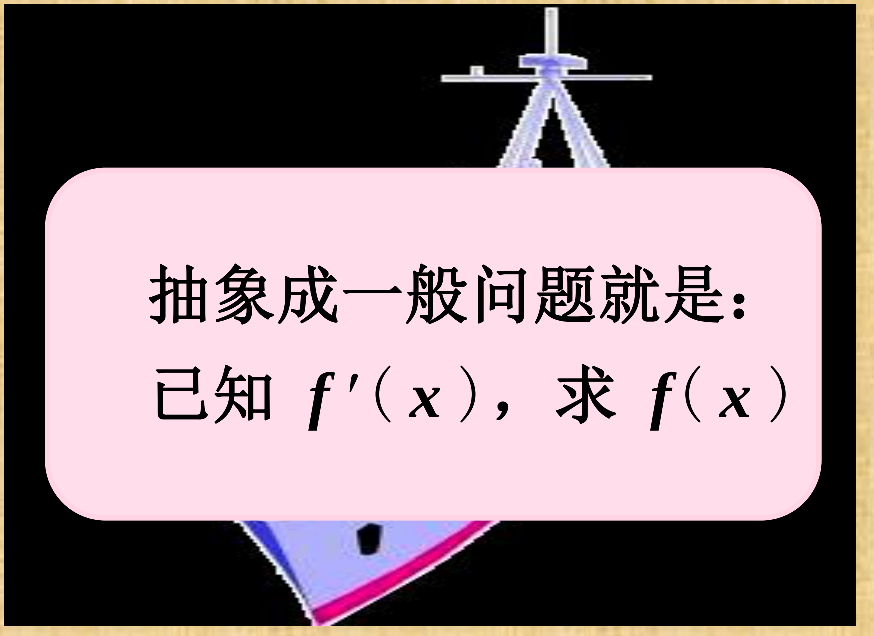
研究物体运动需要知其位移函数。实际问题中，确定质点位移函数常常是不便的，较方便的倒是测定质点运动的速度。

已知速度：$v = v(t)$,

求位移函数$s = s(t)$?

引例2 已知斜率求曲线

在船舶制造中，需根据船体表面受力情况选择船体形状 $y = f(x)$.



切线方向就是 $f'(x)$ 的方向，若能根据流体力学原理确定沿 $f'(x)$ 方向的阻力的大小，则可选择船体形状。

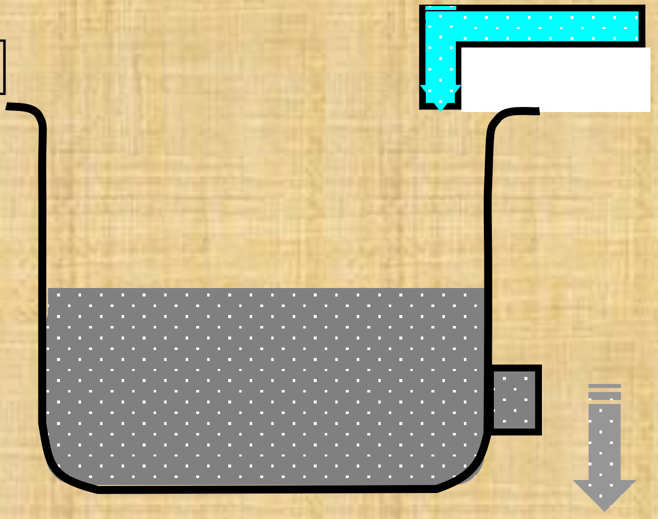
引例3 由微分$f'(x)dx$求$f(x)$的实例

水池有 100 L **溶有污染物的水溶液，其中污染物为** 15kg. **现用清水冲洗，每分钟注入清水** 5L**，混合均匀溶液每分钟流出** 4 L**，**求: 水池中的污染物的量 W 随时间 t 变化的函数式 $W = W(t)$?

$$\mathbf{d}[\ln W(t)] = \mathbf{d}[-4\ln(t + 1000) + C']$$

$$C' = \ln(15 \times 10^{12}).$$

$$W(t) = \frac{15\times10^{12}}{(t+1000)^4}$$



小结:

从数学的观点来看，实际应用中会遇到这样一类问题:

已知一个函数的导数$f(x)$或者微分$f(x)\,\mathrm{d}x$，要求函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$

这正是微分法的反问题，也是积分学的第一个基本问题.

2、原函数的概念

定义： 如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$或$dF(x) = f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I内原函数.

例 $(\sin x)' = \cos x$ 知

$\sin x$是 $\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数.

问题：

（1）是否任何一个函数都存在原函数？

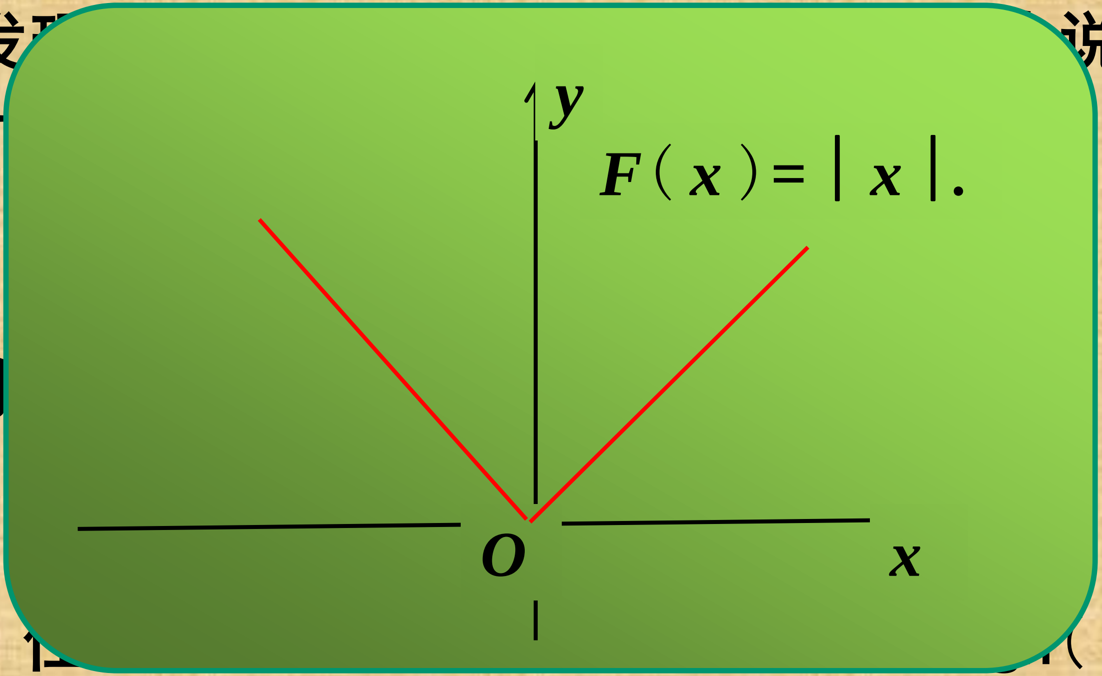
（2）如果原函数存在，是否唯一，如果不唯一，那么这些原函数有什么关系？

(1) 原函数的存在性

研究发… 说明这

一结果，…

例： 讨…



练习： … (x) 在

R 上的原函数。

原函数存在定理：

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数一定存在.

(2) 原函数的唯一性

（1）若 $F'(x)=f(x)$，则对于任意常数 C，

$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

（2）若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，

则 $F(x)-G(x)=C$ （C为任意常数）

证 Θ $[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)$

$=f(x)-f(x)=0$

$\therefore$ $F(x)-G(x)=C$ （C为任意常数）

3、不定积分的概念

在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的**不定积分**，记为$\int f(x)dx$.

若$F'(x)=f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

★ 要注意区别原函数与不定积分的概念：

后者是一个集合，前者是这集合中的一个元素.

若 $F'(x) = f(x)$. 则 $\int f(x)dx = F(x)$是错误的.

例 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$.

解 Θ $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C.$$

由不定积分的定义，可知有下述关系成立：

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]= f(x),\qquad d[\int f(x)dx]= f(x)dx,$$

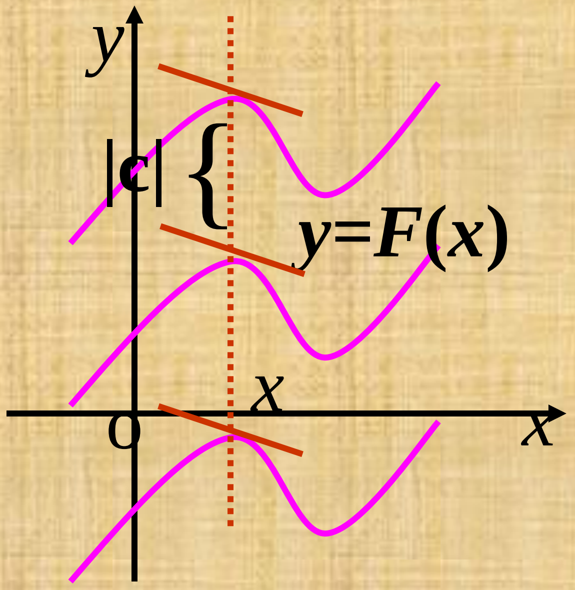
$$\int F'(x)dx = F(x)+C \qquad \int dF(x) = F(x)+C$$

结论： 微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

4、不定积分的几何意义

若$y = F(x)$是函数 $y=f(x)$的一个原函数，称 $y = F(x)$ 的图形是$f(x)$ 的一条积分曲线；

而 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 所以它对应的图形是一族曲线称它为积分曲线族,



例 求过点(1, 3)，且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

解: 设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，则

$$y' = f'(x) = 2x,$$

即$f(x)$是$2x$ 的一个原函数.

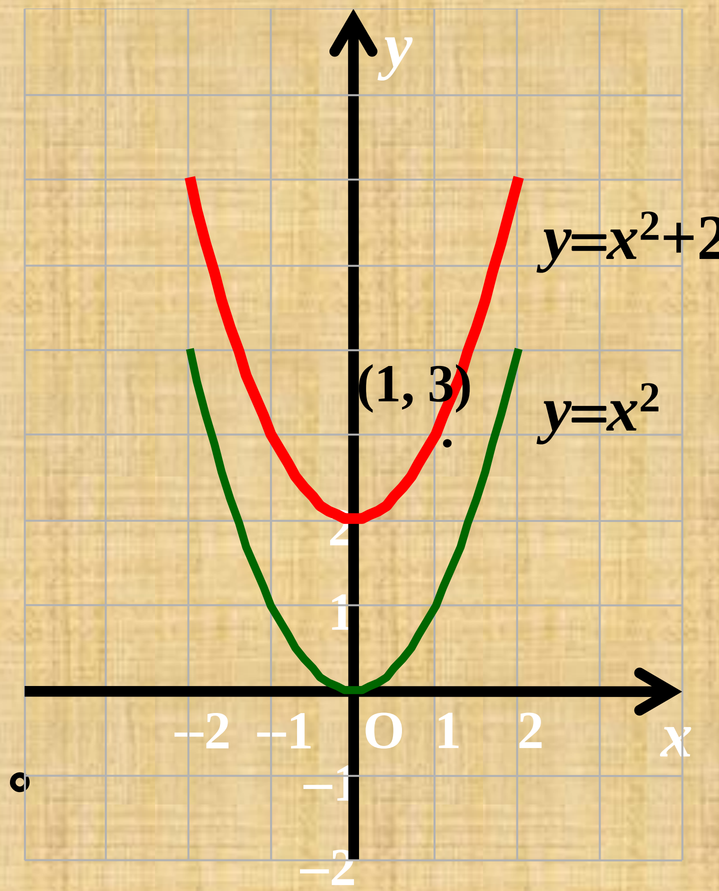
因为 $\int 2x dx = x^2 + C$

所以 $y=f(x)=x^2+C$.

因为所求曲线通过点(1, 3),

故 $3=1+C$，$C=2$。

于是所求曲线方程为$y=x^2+2$。



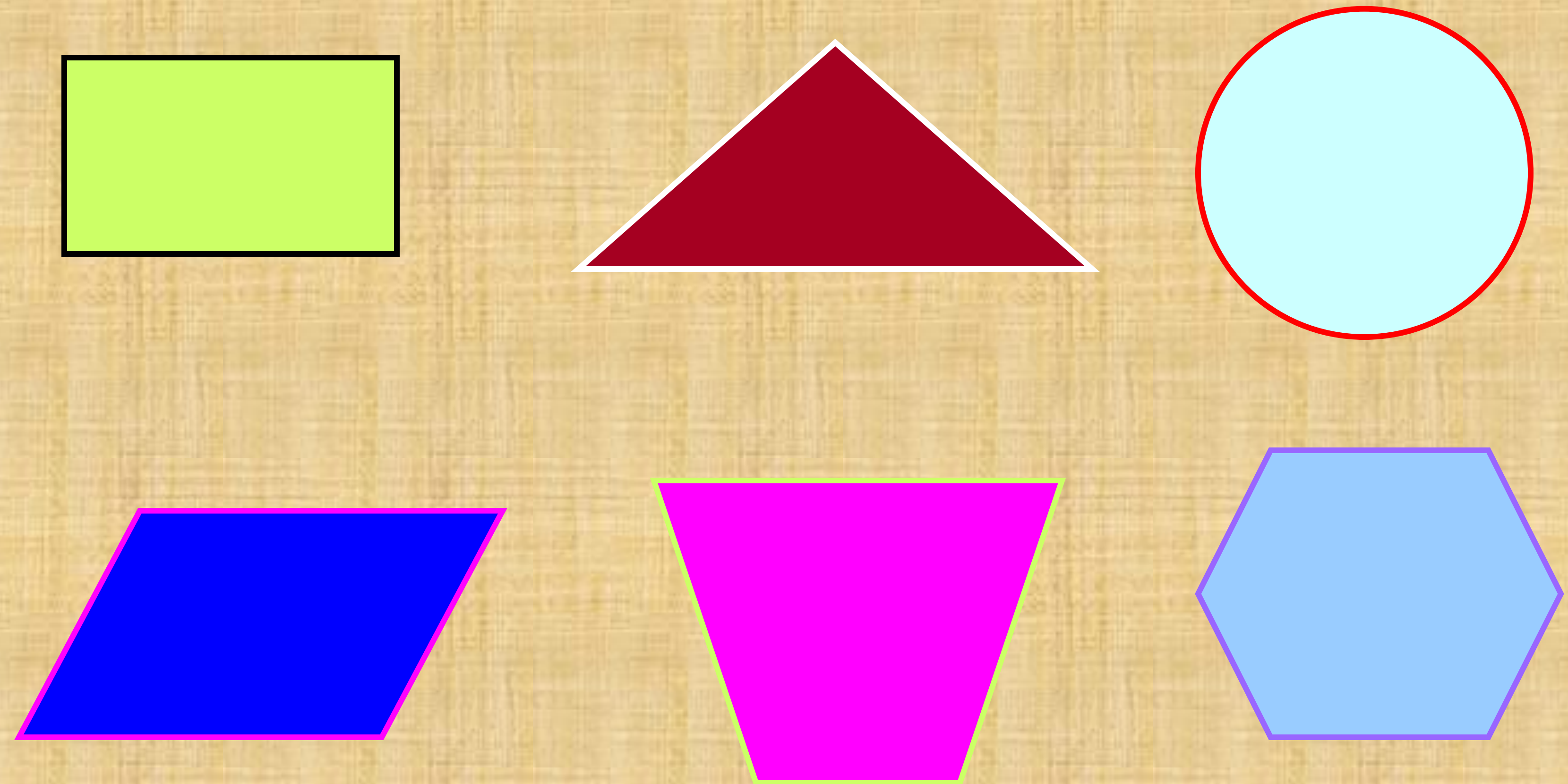
§4.1 定积分的概念

一、实际问题举例

二、定积分的概念

一、实际问题举例

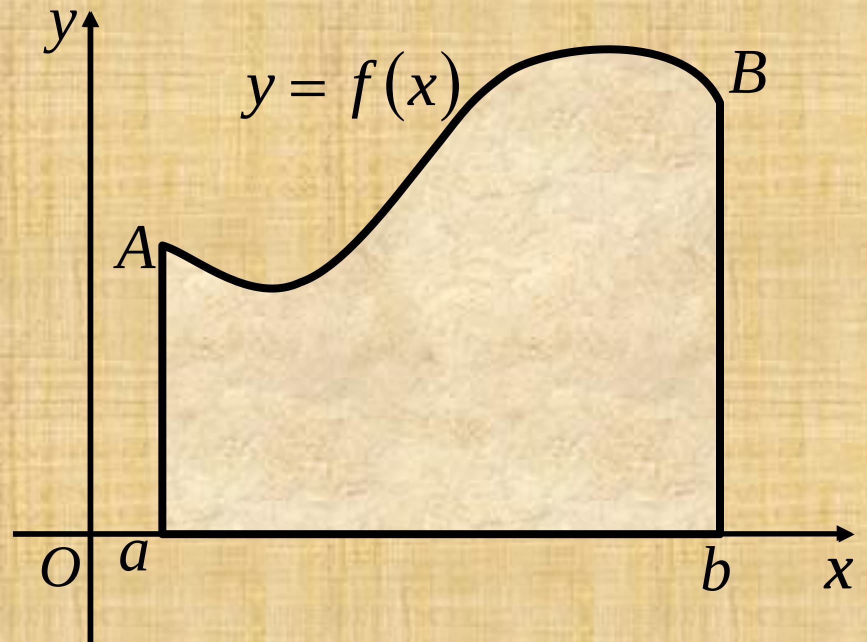
以往我们会计算一些规则的平面图形的面积



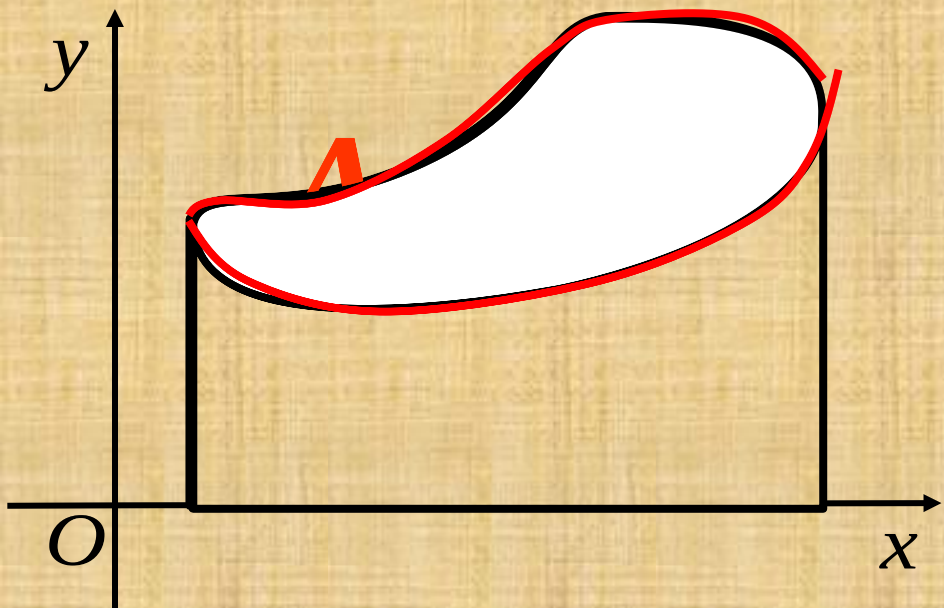
如何求这些**不规则图形**的面积？

案例1　求曲边梯形的面积

曲边梯形: 由连续曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$，x轴及两条直线 $x = a, x = b$ 所围成的图形.

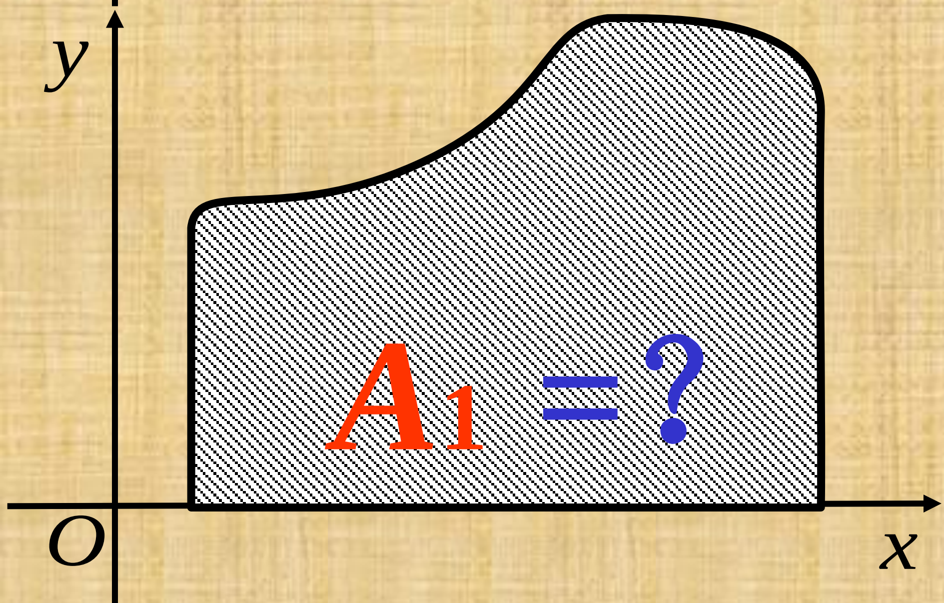


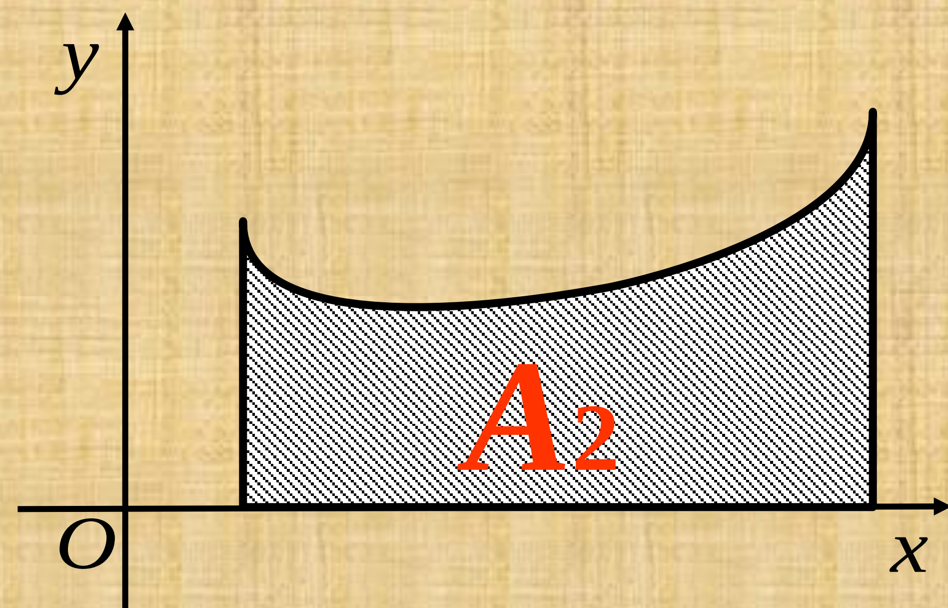
问题 ：如何求曲边梯形的面积 A.



面积 $A=?$

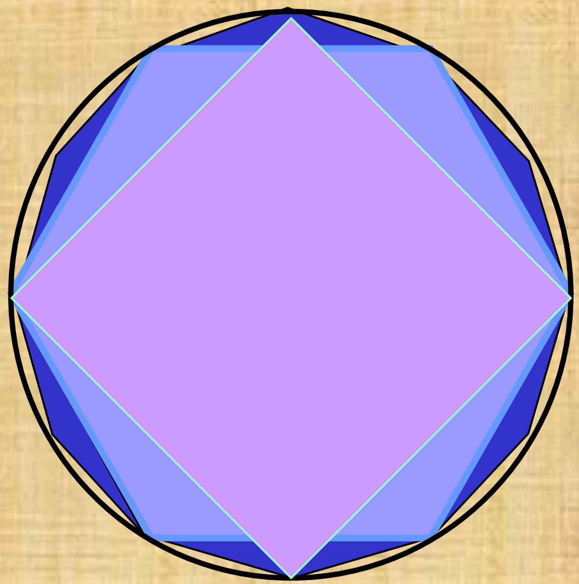
$=A_1 - A_2$





曲边梯形

启发：



1、割圆术：

——刘徽

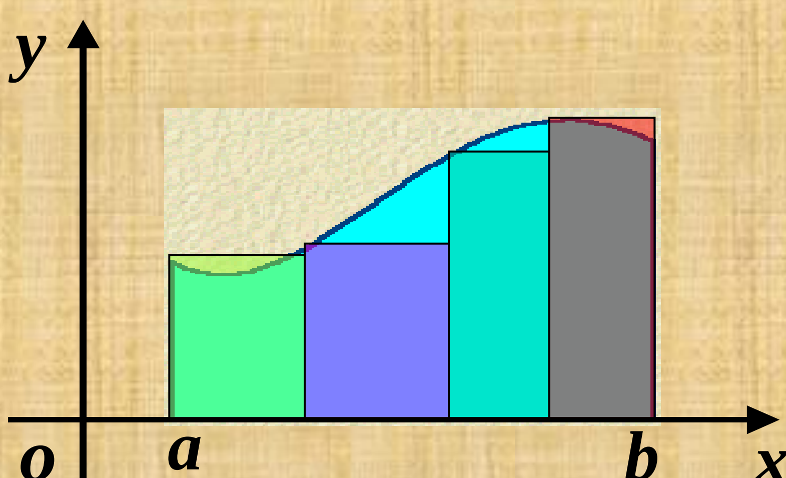
方法：用正多边形的面积无限逼近圆面积

正四边形的面积 A_1

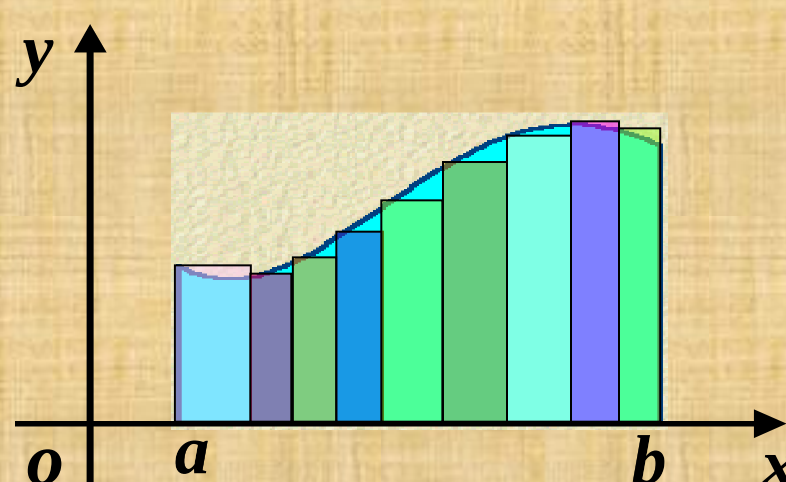
正六边形的面积 A_2

正十二边形的面积A3 …… $\xrightarrow{\text{极限}}$ 圆面积A

思路：用已知代未知，利用极限由近似到精确。



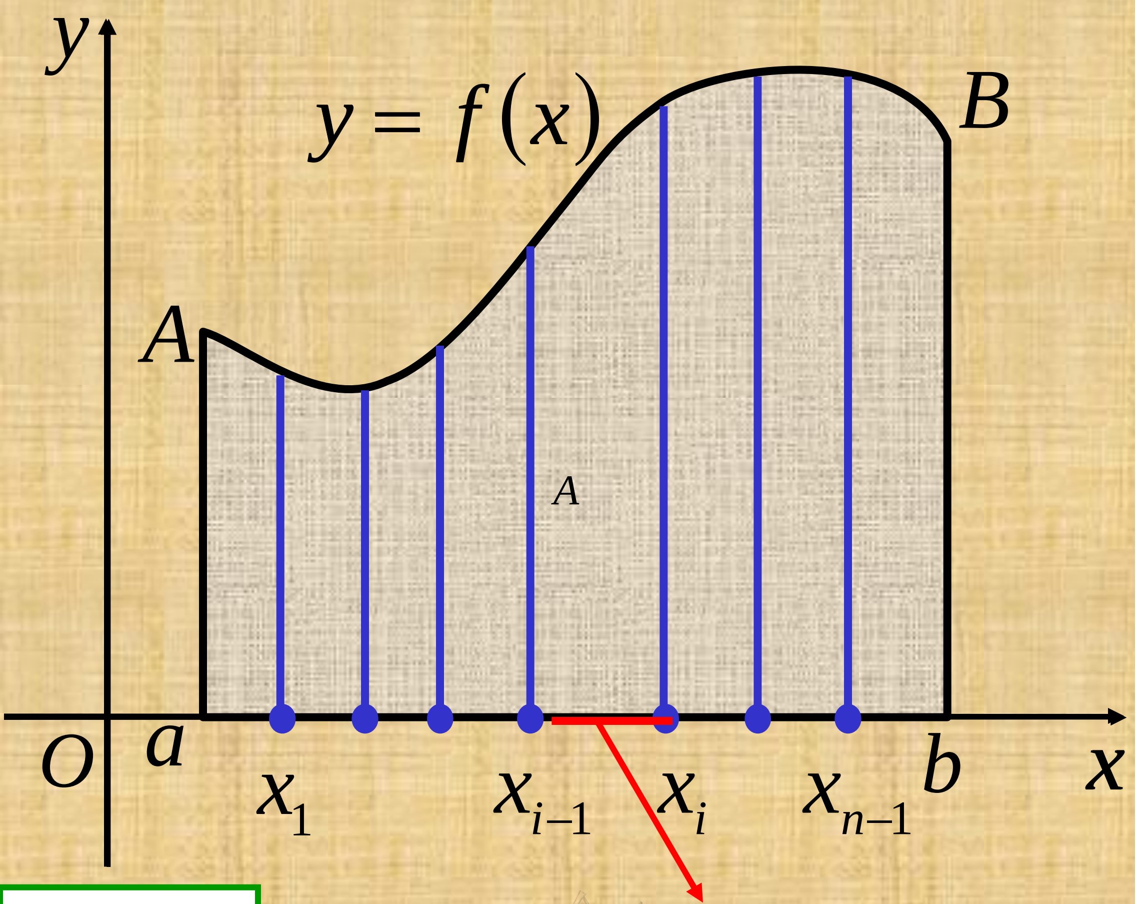
（四个小矩形）

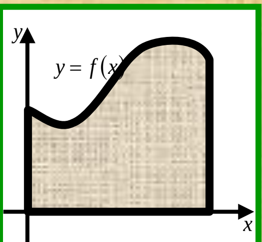


（九个小矩形）

一般地，小矩形越多，小矩形面积和越接近曲边梯形面积.

引例1：求曲边梯形的面积的步骤：



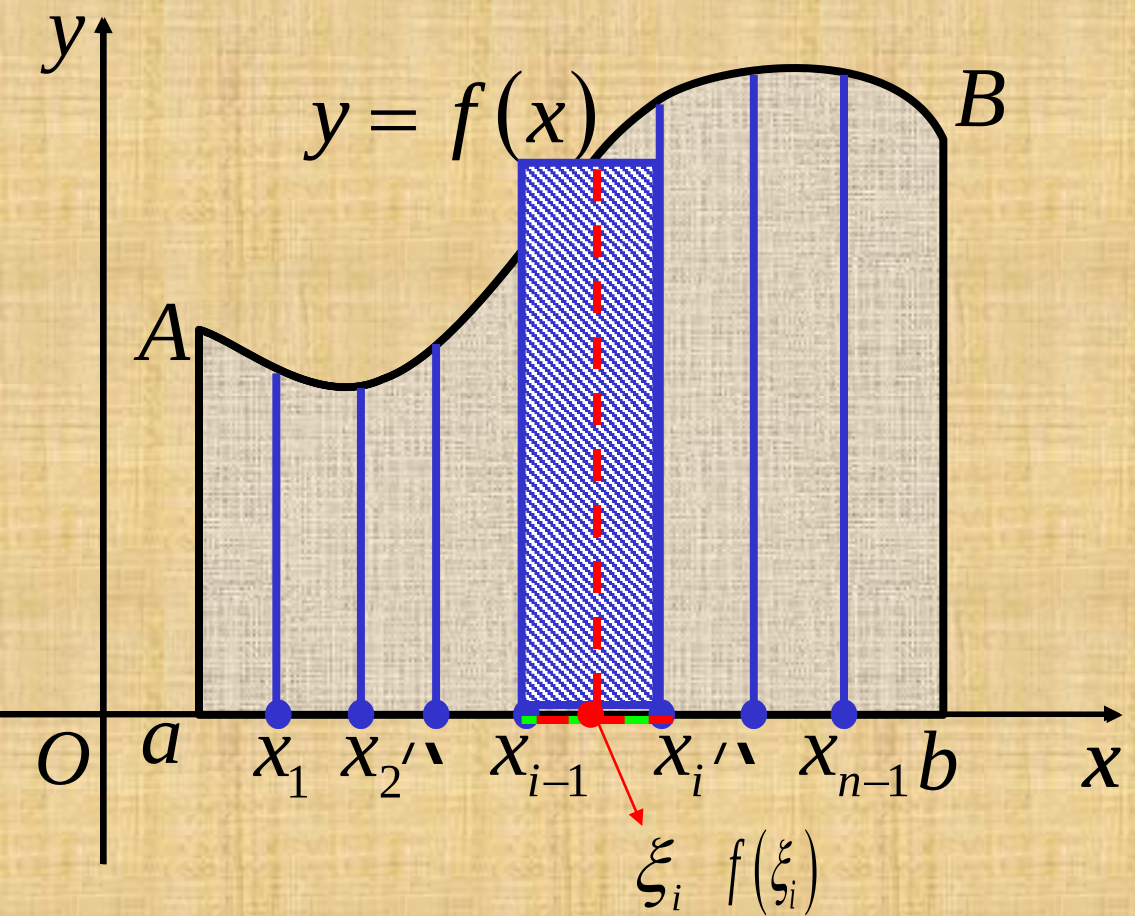


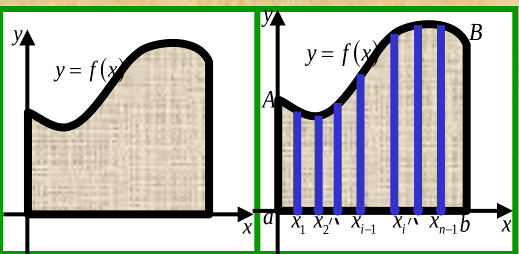
I 分割(化整为零)

在$[a,b]$内插入$n-1$个分点，即：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

引例1：求曲边梯形的面积的步骤：



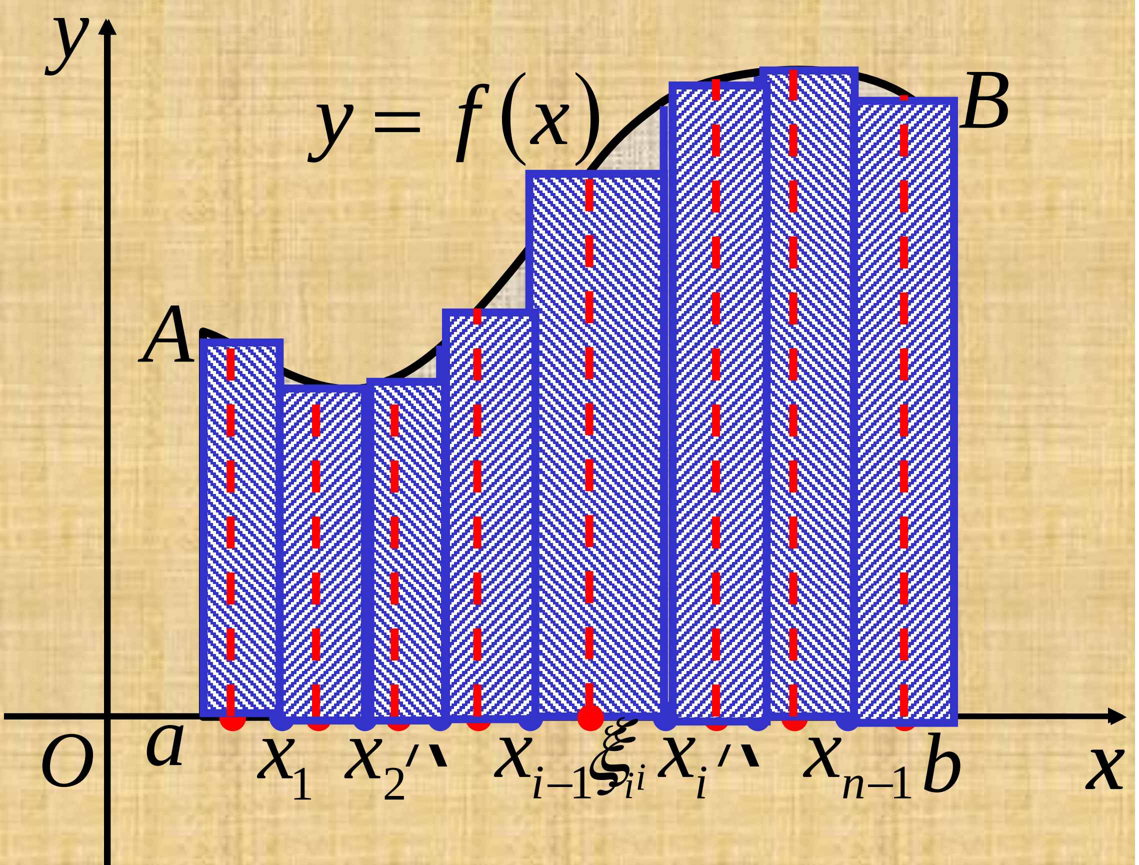


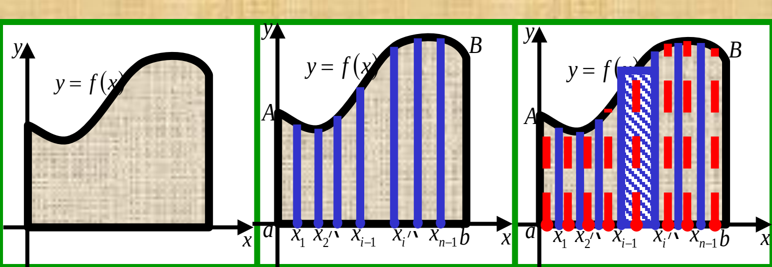
II 近似(不变代变)

用小矩形的面积近似代替相应小曲边梯形的面积，即

，$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$

引例1：求曲边梯形的面积的步骤：



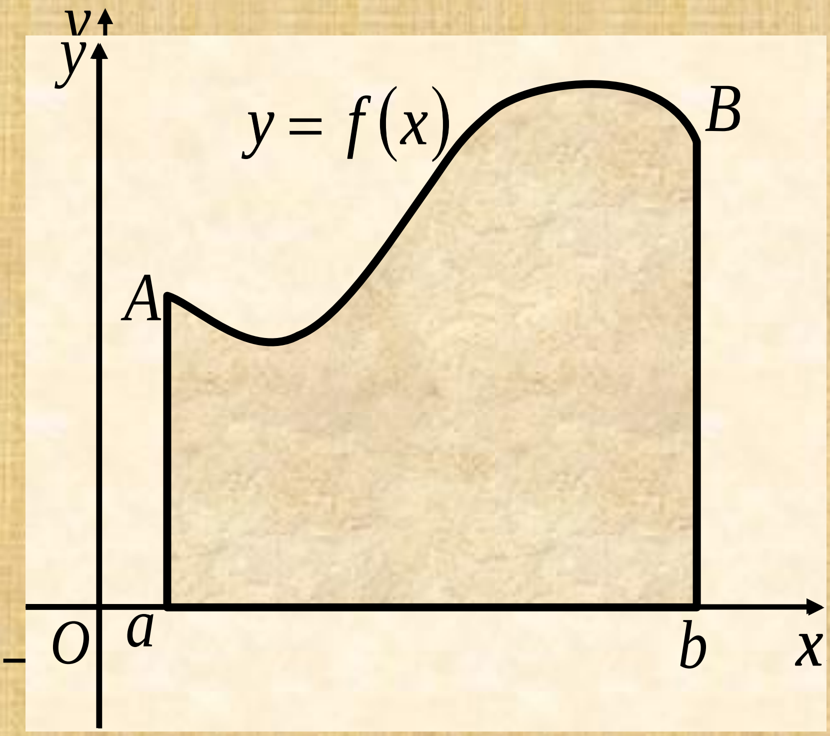


Ⅲ 求和(积零为整)

则曲边梯形的面积近似等于 n 个矩形面积之和，即

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$

引例1：求曲边梯形的面积的步骤：Ⅳ 取极限（无限逼近）



$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

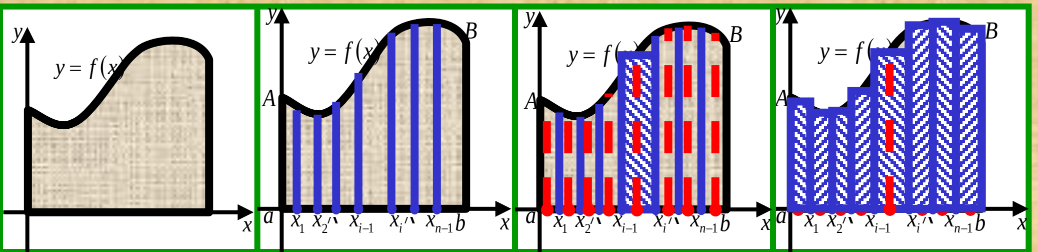
设 $\lambda = \max\{\Delta x_1 \cdots \Delta x_n\}$

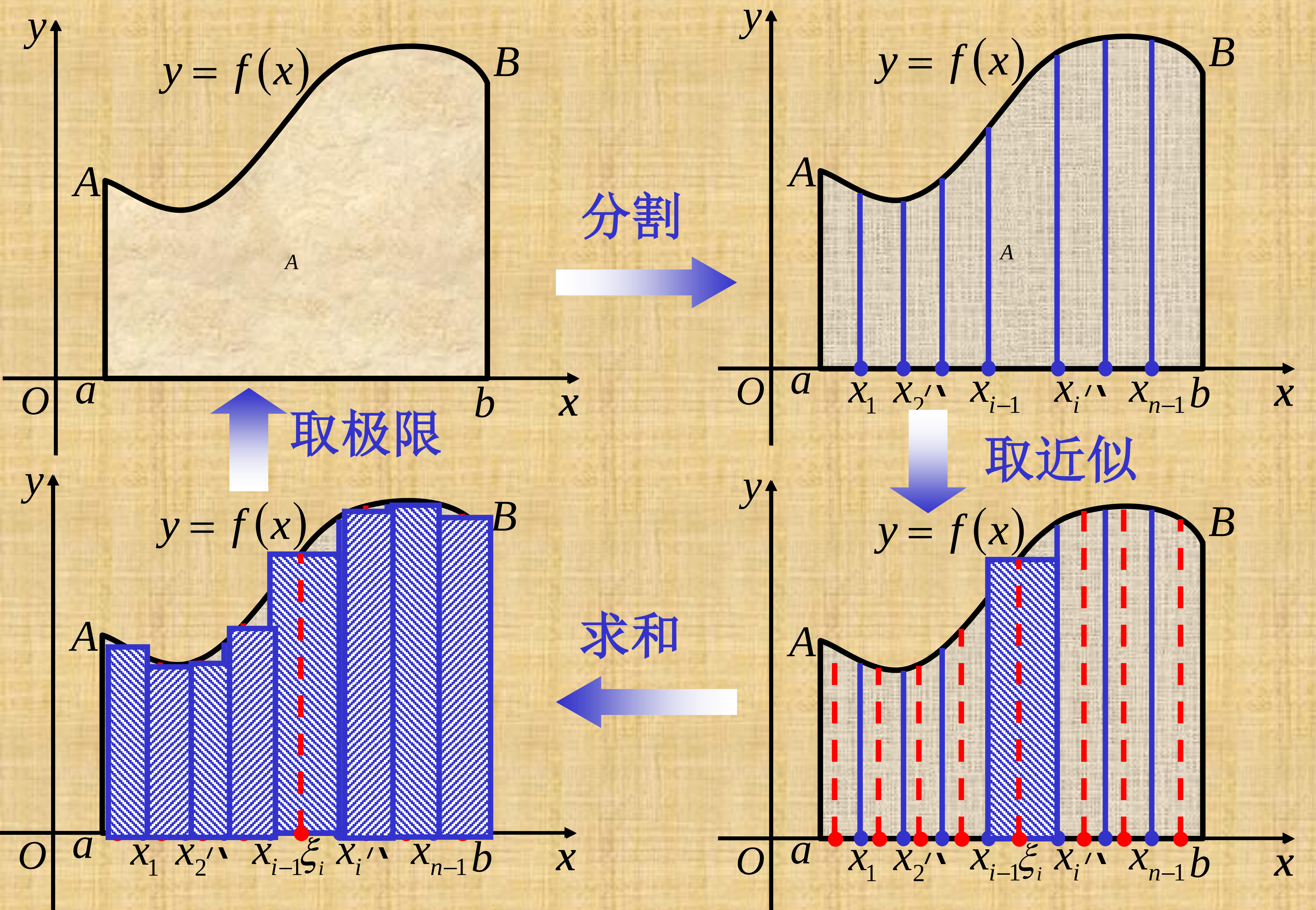
即小区间的最大宽度

显然 $\lambda \to 0$,

可保证每个 $\Delta x_i \to 0$

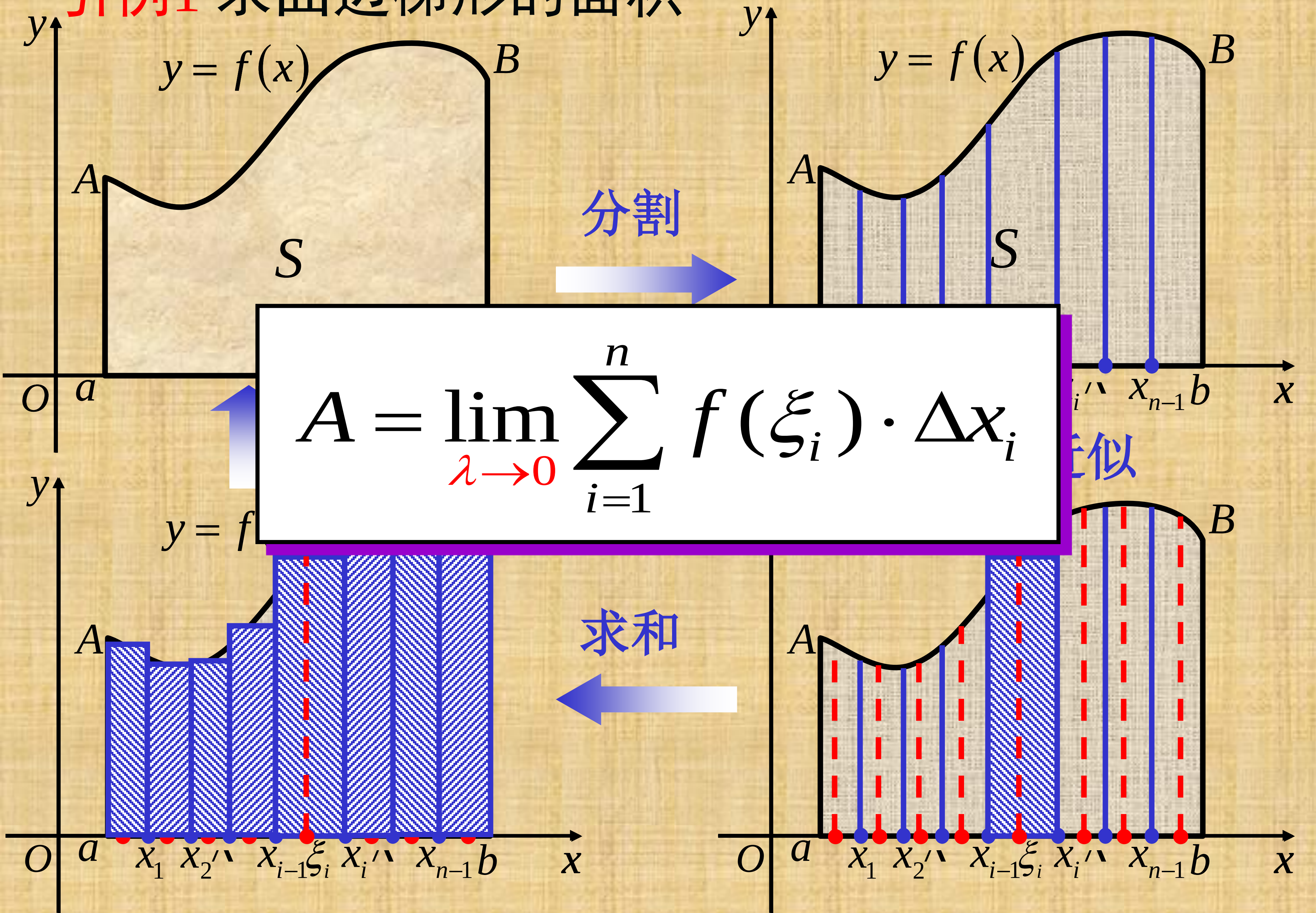
$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$





分割
取近似
求和
取极限
y = f(x)
A
B
O
a
b
x
y
x1 x2 … xi−1 ξi xi … xn−1

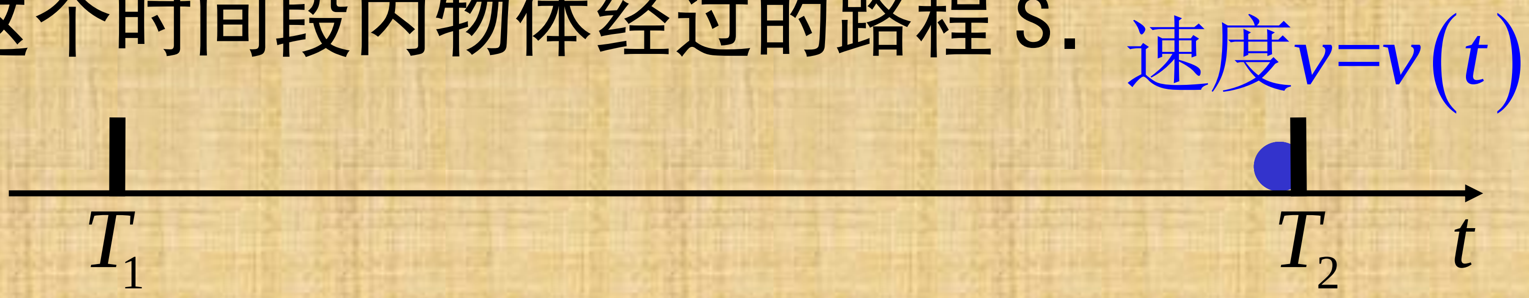
引例1 求曲边梯形的面积



$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

引例2 变速直线运动的路程

设某物体作变速直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间段 $[T_1, T_2]$ 内对 t 的连续函数，且 $v(t) \geq 0$．求在这个时间段内物体经过的路程 S．

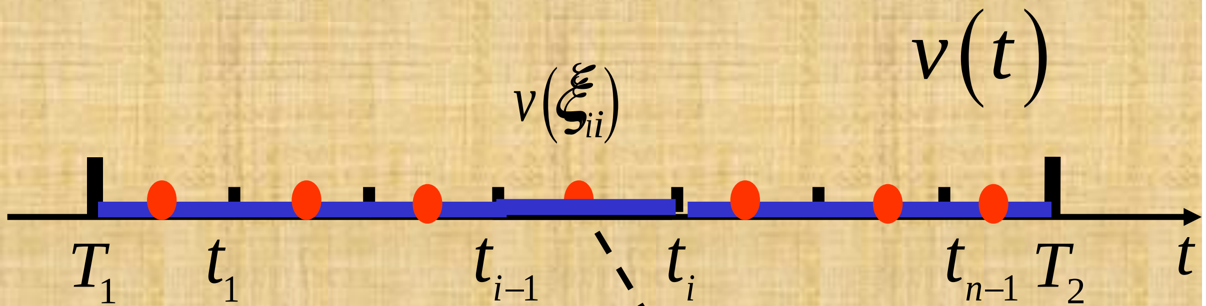


方法： 分割 → 近似 → 求和 → 取极限

尝试：用求解曲边梯形面积的方法求解该问题

（类比解决）

引例2：求变速直线运动路程的**步骤**：



$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\Delta s_i$$

Ⅰ 分割（化整为零）

将时间段$[T_1, T_2]$分成 n 个小时间段

Ⅱ 近似(不变代变)

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

Ⅲ 求和(积零为整)

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$$

Ⅳ 取极限(无限逼近)

令 $\lambda = \max\{\Delta t_1 \cdots \Delta t_n\}$

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$$

以上上二例的共性:

分割 → 近似 → 求和 → 取极限

(化整为零)　(不变代变)　(积零为整)　(无限逼近)

面积: $S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

路程: $L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i) \cdot \Delta t_i$

二、定积分的定义

定义　设 $f(x)$在$[a,b]$上有定义。

（Ⅰ分割）在$[a,b]$中任意插入分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \Lambda < x_{n-1} < x_n = b$

把$[a,b]$分成小区间，

（Ⅱ近似）任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1, 2, K$

（Ⅲ求和）并求和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

（Ⅳ取极限）记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Lambda, \Delta x_n\}$，

若$\lambda \to 0$，总有 S 趋于确定的极限 I，

则称 I 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的**定积分**记作 $\int_a^b f(x)\,dx$

即

积分上限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间。

注：

（1）积分仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母的选择无关.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的.

利用定积分的定义，在第一部分求解的这两个量都可以统一成定积分:

引例1:

面积: $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \boxed{=\int_a^b f(x)dx}$

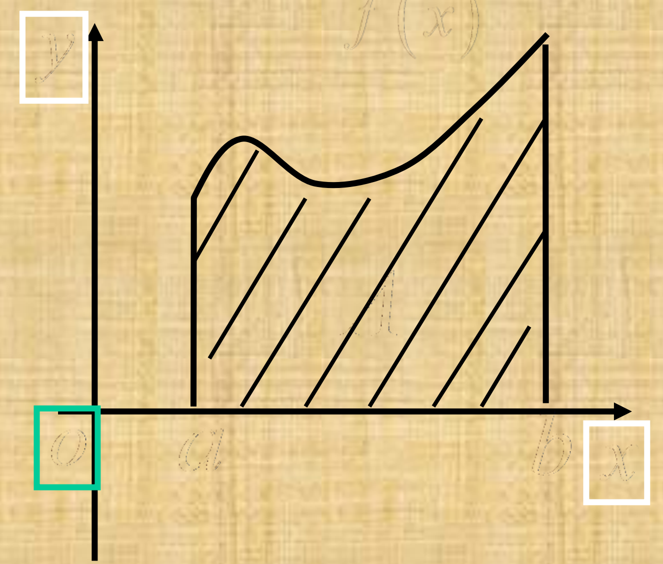
引例2:

路程: $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\cdot\Delta t_i \boxed{=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt}$

三、定积分的几何意义:

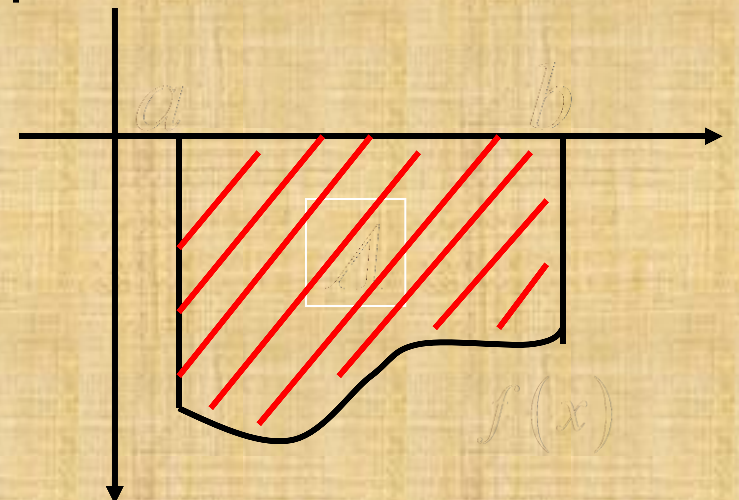
$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$

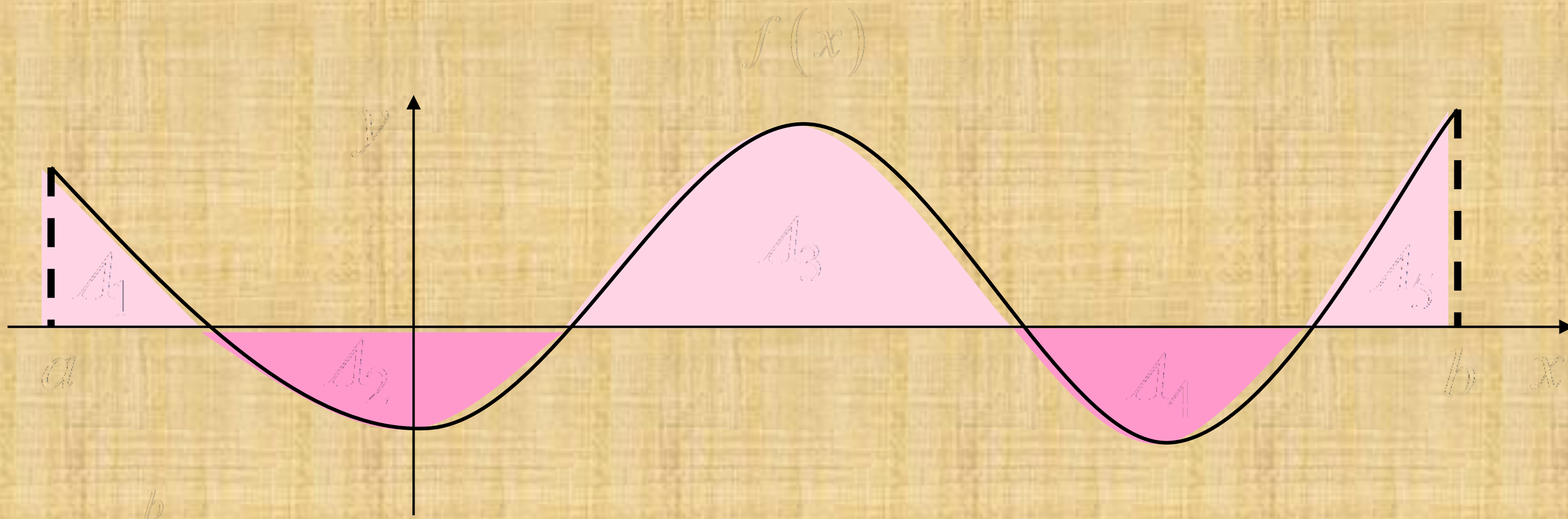
为曲边梯形的面积



$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$

为曲边梯形面积的负值





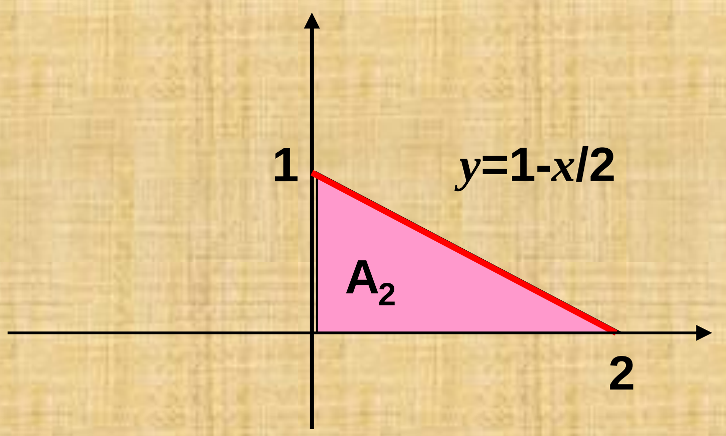
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

即　各部分面积的代数和

例1 已知 $f(x)=1-\dfrac{x}{2}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解： 利用定积分的几何意义，可知

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 表示以 $f(x)$ 为顶的曲边梯形的面积.



$$\int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = A_2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\times 2\times 1 = 1$$

故 $\int_0^2 \left(1-\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 1$

五、小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

求近似：以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

取极限

取极限 → 精确值——定积分

3．定积分的几何意义

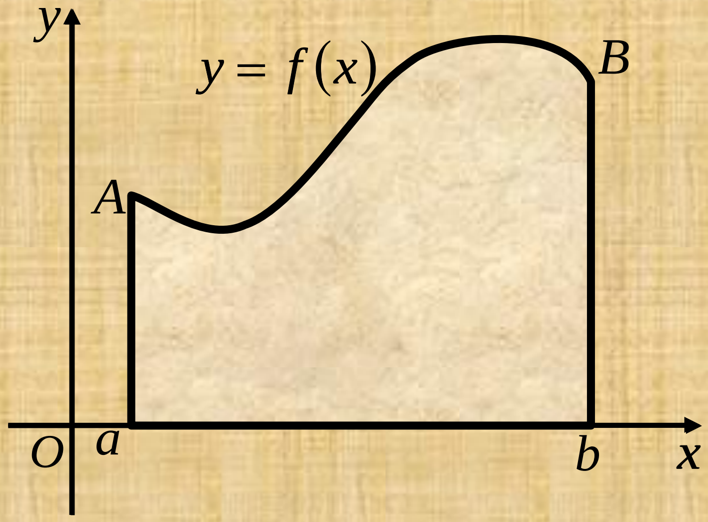
§5.2 牛顿-莱布尼茨公式

一、实际问题举例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿-莱布尼茨公式

一、实际问题举例



面积：$A = \int_a^b f(x)dx$

路程：$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

速度$v = v(t)$


程力专汽
CLW GROUP
LPG
严禁烟火
黄页88网
www.huangye88.com

实际问题中的所求量: $U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$

用定义计算 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x$

必须寻找计算定积分的简便的新方法！

启发：

位置函数$s = s(t)$；速度函数$v = v(t)$

计算小球在时间间隔$[T_1, T_2]$内经过的路程S？

（1）用s(t)计算[T_1, T_2]内的位移s？ $s = s(T_2) - s(T_1)$

（2）用v(t)计算[T_1, T_2]内的位移s？ $s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2) - s(T_1) \qquad 而 s'(t) = v(t)$$

你能将上述结论推广成一般形式吗？

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2) - s(T_1)$$

而 $s'(t) = v(t)$

特殊

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$F'(x) = f(x)$,

$x \in (a,b)$

一般

二、积分上限的函数及其导数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $c.t.$， $x\in[a,b]$，

考察 $\int_a^x f(x)dx$

1、 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $c.t.$， 故 $\int_a^x f(x)dx\ \exists$

x 既是上限又是积分变量，

又定积分与变量字母无关，

以免混淆，记为 $\int_a^x f(t)dt \quad \Lambda\ (*)$

2、若 x 在 $[a,b]$ 内变动，则取定一个 x 值，定积分

$\int_a^x f(t)dt$ 便有一个对应值。

所以上式实际上定义了一个在 $[a,b]$ 上的函数。

称 $\int_a^x f(t)dt$ 为积分上限函数。

并记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a\le x\le b)$

积分上限函数具有以下性质：

定理 4.3：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $c.t.$，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且它的导数是：

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x) \qquad (a\le x\le b)$$

定理 4.4：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $c.t.$，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。（原函数存在定理）

该定理说明：

1、连续函数的原函数是存在的；

2．揭示了定积分与原函数之间的联系。

三、牛顿-莱布尼茨公式

定理 4.5：若 $F(x)$ 为 $c.t.$ 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

-----牛顿—莱布尼兹公式

常记为：$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

该定理称为微积分基本公式

牛顿一莱布尼茨公式提供了计算定积分的简便的基本方法，该公式把计算定积分归结为求原函数的问题，揭示了定积分与不定积分之间的内在联系.

例1 求$\int_0^1 x^2 dx$.

解： 原式$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

例2 求$\int_{-1}^{-2}\frac{1}{x}dx$.

解： 原式$=\ln|x|\Big|_{-1}^{-2}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

例3 求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, \mathrm{d} x$

解：因为 $(\sin x)' = \cos x$,

所以 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, \mathrm{d} x = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$